X-MAT

Superpoderes Matemáticos
para Concursos Militares
Volume 3
2ª edição

EFOMM

2009 - 2016

Renato Madeira
www.madematica.blogspot.com

Sumário

INTRODUÇÃO

Esse livro é uma coletânea com as questões das Provas de Matemática do Processo Seletivo da Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM) dos anos de 2009 a 2016 detalhadamente resolvidas e classificadas por assunto, totalizando 160 questões.

No capítulo 1 encontram-se os enunciados das provas, para que o estudante tente resolvê-las de maneira independente.

No capítulo 2 encontram-se as respostas às questões e a sua classificação por assunto. É apresentada também uma análise da incidência dos assuntos nesses 6 anos de prova.

No capítulo 3 encontram-se as resoluções das questões. É desejável que o estudante tente resolver as questões com afinco antes de recorrer à sua resolução.

Espero que este livro seja útil para aqueles que estejam se preparando para o concurso da EFOMM ou concursos afins e também para aqueles que apreciam Matemática.

Renato de Oliveira Caldas Madeira é engenheiro aeronáutico pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) da turma de 1997 e Mestre em Matemática Aplicada pelo Fundação Getúlio Vargas (FGV-RJ) em 2015; participou de olimpíadas de Matemática no início da década de 90, tendo sido medalhista em competições nacionais e internacionais; trabalha com preparação em Matemática para concursos militares há 20 anos e é autor do blog "Madematica".

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar esse livro à minha esposa Poliana pela ajuda, compreensão e amor durante toda a vida e, em particular, durante a elaboração dessa obra e a meus filhos Daniel e Davi que eu espero sejam futuros leitores deste livro.

Renato Madeira

Acompanhe o blog www.madematica.blogspot.com e fique sabendo dos lançamentos dos próximos volumes da coleção X-MAT!
Volumes já lançados:
Livro X-MAT Volume 1 EPCAr 2010-2016 (2ª edição)
Livro X-MAT Volume 2 AFA 2010-2016 (2ª edição)
Livro X-MAT Volume 4 Escola Naval 2010-2016 (2ª edição)
Livro X-MAT Volume 5 Colégio Naval 1984-2016 (2ª edição)
Livro X-MAT Volume 6 EsPCEx 2011-2016 (1ª edição)

CAPÍTULO 1 - ENUNCIADOS

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2015/2016

1) Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c). Qual é a probabilidade de que b seja sucessor de a e que c seja sucessor de b OU que a, b e c sejam primos?

a) $\frac{4}{216}$

b) $\frac{27}{216}$

c) $\frac{108}{216}$

d) $\frac{31}{216}$

e) $\frac{10}{216}$

2) O valor da integral $\int \left[\sqrt{2} \cdot \text{tg}^3(2x) \cdot \sec(2x)\right]^2 dx$, sendo c uma constante, é

a) $\sec^2(2x) + \text{tg}^2(2x) + c$

b) $\frac{\sec^2(2x) + \text{tg}^2(2x) + c}{\text{tg}(2x)}$

c) $\text{arctg}(\ln x) + c$

d) $\frac{\text{tg}^7(2x)}{7} + c$

e) $\sqrt{\text{tg}(2x)} + \text{sen}(2x) + c$

3) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.

a) 625

b) 781150

c) 1000

d) 250

e) 375

4) O valor de $\lim_{t \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}$ é:

a) 1

b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 2

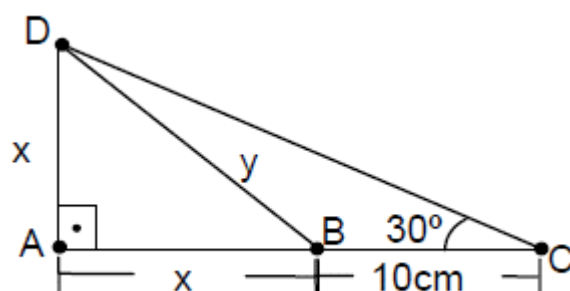
5) A solução do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+w=7 \\ xy+xz+xw+yz+yw+zw=4 \\ xyz+xyw+xzw+yzw=6 \\ xyzw=1 \end{cases}$$

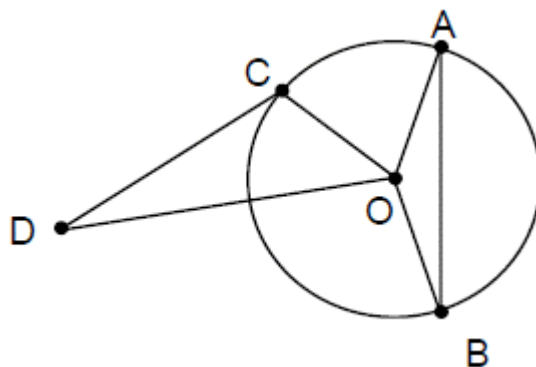
pode ser representada pelas raízes do polinômio:
a) x^3+6x^2+4x+7
b) x^3-6x^2+4x-7
c) $2x^4-14x^3+8x^2-12x+2$
d) $7x^4-4x^3+6x^2+x$
e) $x^4+7x^3+4x^2+6x$

6) Sabendo que $\frac{5}{2}$ é uma raiz do polinômio $P(x)=2x^3-3x^2-9x+10$, a soma das outras raízes é igual a:
a) -2
b) 0
c) 10
d) 1
e) -1

7) Seja o número complexo $z=-1-\sqrt{3}i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de z^8 é:
a) $z=256\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right)$
b) $z=256\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$
c) $z=256\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$
d) $z=256\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right)$
e) $z=256(\cos 2\pi+i\,\text{sen}\,2\pi)$

8) Determine o perímetro do triângulo ABD, em cm, representado na figura abaixo:

a) $5\sqrt{3}+5$
b) $5\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$
c) $20+4\sqrt{5}$
d) 45
e) 50

9) Determine o comprimento do menor arco AB na circunferência de centro O, representada na figura a seguir, sabendo que o segmento OD mede 12 cm, os ângulos $C\hat{O}D=30°$ e $O\hat{A}B=15°$ e que a área do triângulo CDO é igual a $18\,\text{cm}^2$.

a) 5π cm
b) 12 cm
c) 5 cm
d) 12π cm
e) 10π cm

10) Dados os pontos $A(-2,5)$, $B(1,1)$ e $C(-1,-1)$, o valor da altura do triângulo ABC em relação à base AC é igual a:
a) $\sqrt{37}$
b) 5
c) $\sqrt{8}$
d) $\dfrac{14\sqrt{37}}{37}$
e) 7

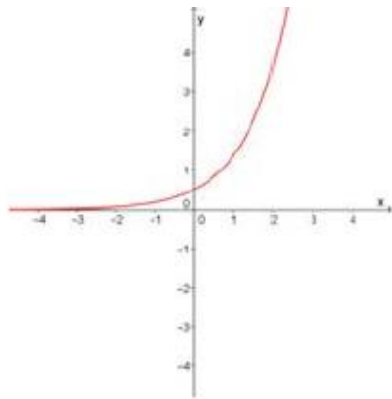
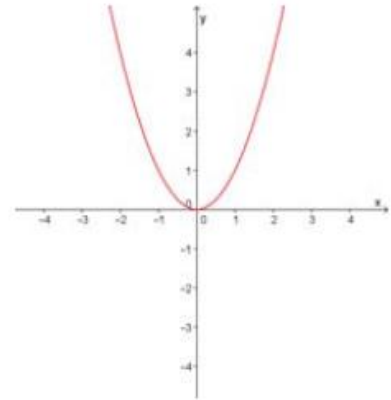
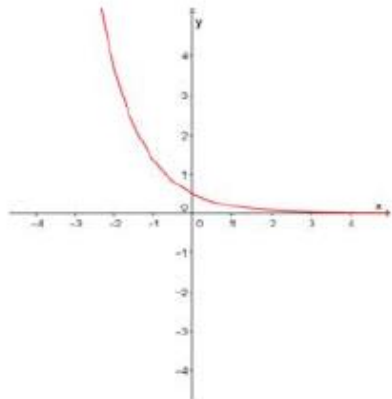
11) Numa progressão geométrica crescente, o 3º termo é igual à soma do triplo do 1º termo com o dobro do 2º termo. Sabendo que a soma desses três termos é igual a 26, determine o valor do 2º termo.
a) 6
b) 2
c) 3
d) 1
e) $\frac{26}{7}$

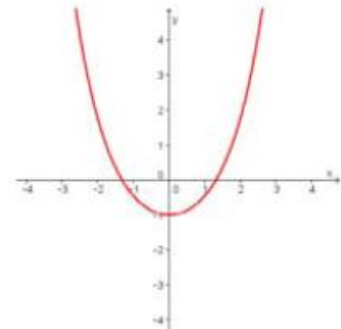
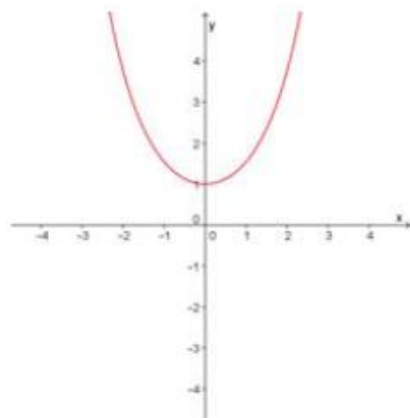
12) Determine a imagem da função f, definida por $f(x) = ||x+2| - |x-2||$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.
a) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
b) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
c) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$
d) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$
e) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

13) Quanto à posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ como
a) secantes.
b) tangentes internas.
c) tangentes externas.
d) externas.
e) internas.

14) A quantidade de anagramas da palavra MERCANTE que não possui vogais juntas é
a) 40320
b) 38160
c) 37920
d) 7200
e) 3600

15) Um aluno precisa construir o gráfico da função real f, definida por $f(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}$. Ele percebeu que a função possui a seguinte característica: $f(-x) = \frac{e^{-x}}{2} + \frac{e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = f(x)$. Assinale a alternativa que representa o gráfico dessa função.

(a)

(d)

(b)

(e)

(c)

16) Seja um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médio de cada lado, temos um segundo quadrado. Unindo os pontos médios do segundo quadrado, temos um terceiro quadrado, e assim sucessivamente. O produto das áreas dos dez primeiros quadrados é

a) $2^{-\frac{9}{2}}$

b) $2^{-\frac{25}{2}}$

c) $2^{-\frac{45}{2}}$

d) 2^{-45}

e) 2^{-25}

17) O número complexo, $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$, sendo i a unidade imaginária e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, que satisfaz a inequação $|z + 3i| \leq 2$ e que possui o menor argumento θ, é

a) $z = -\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

b) $z = -\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

c) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{5}{3}i$

d) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{5}{3}i$

e) $z = -2\sqrt{5} + 5i$

18) Seja o polinômio $p(x) = x^6 - 26x^4 - 32x^3 - 147x^2 - 96x - 180$. A respeito das raízes da equação $p(x) = 0$, podemos afirmar que

a) todas as raízes são reais.
b) somente duas raízes são reais, sendo elas distintas.
c) somente duas raízes são reais, sendo elas iguais.
d) somente quatro raízes são reais, sendo todas elas distintas.
e) nenhuma raiz é real.

19) Um garrafão contém 3 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea. Retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água, e assim por diante. A quantidade de vinho, em litros, que resta no garrafão, após 5 dessas operações, é aproximadamente igual a

a) 0,396
b) 0,521
c) 0,676
d) 0,693
e) 0,724

20) Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A, ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a

a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$

c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2014/2015

1) O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais a_1, a_2 e a_3 formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, com primeiro termo 2 e representam as medidas dos lados de um triângulo, é

a) $\left]-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

b) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

c) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right[$.

d) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right[$.

e) $\left]1, 1+\sqrt{5}\right[$.

2) Sabendo-se que $a = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$, pode-se afirmar que o ângulo θ, em radianos, tal que $\text{tg}\,\theta = \ln a - 1$, pode ser

a) $-\frac{\pi}{4}$

b) $-\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{2}$

3) Considere o número complexo $z_1 \neq 1$, tal que z_1 seja solução da equação $z^6 = 1$, com menor argumento positivo. A solução z_2 da mesma equação, cujo argumento é o triplo do argumento de z_1, é igual a

a) $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) -1

d) $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) Considerando os pontos $A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(1,5)$, $D(3,2)$ e P como a interseção dos segmentos AB e CD, a expressão $3a+6b$, onde a é a área do triângulo APC e b é a área do triângulo BPD, é igual a
a) 24
b) 20
c) 10
d) 16
e) 12

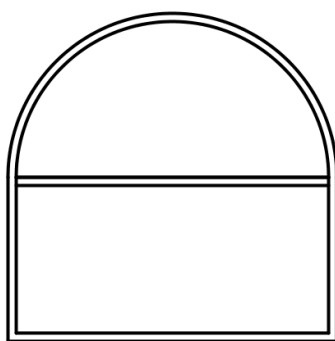
5) Uma turma de alunos do 1° ano da EFOMM tem aulas às segundas, quartas e sextas, de 8h40 às 10h20 e de 10h30 às 12h. As matérias são Arquitetura Naval, Inglês e Cálculo, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?
a) 9
b) 18
c) 36
d) 48
e) 54

6) Sejam as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Sabendo que f é bijetora e g é sobrejetora, considere as sentenças a seguir:
I - $g\circ f$ é injetora;
II - $f\circ g$ é bijetora;
III - $g\circ f$ é sobrejetora.
Assinalando com verdadeiro (V) ou falso (F) a cada sentença, obtém-se
a) V – V – V
b) V – V – F
c) F – V – F
d) F – F – V
e) V – F – V

7) Sabendo-se que $\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}=a$, calcule, em função de a,

$$\det\begin{pmatrix} 2e & 2\pi & \sqrt{8} & 24^{\frac{1}{3}} & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix}.$$

a) 2a
b) –2a
c) a
d) –a
e) 3a

8) Deseja-se construir uma janela que, possuindo a forma de um retângulo sob um semicírculo, conforme figura abaixo, permita o máximo de passagem de luz possível.
Sabe-se que: o vidro do retângulo será transparente; o vidro do semicírculo será colorido, transmitindo, por unidade de área, apenas metade da luz incidente em relação ao vidro transparente; o perímetro total da janela é fixo p.
Nessas condições, determine as medidas da parte retangular da janela, em função do perímetro p.
Obs.: Ignore a espessura do caixilho.

a) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{2(3\pi+8)}p$
b) $\frac{2}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{4(3\pi+8)}p$
c) $\frac{8}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{3\pi+8}p$
d) $\frac{6}{3\pi+8}p$ e $\frac{3(\pi+4)}{4(3\pi+8)}p$
e) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{8}{3\pi+8}p$

9) Um juiz de futebol trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma outro face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, a probabilidade de a face voltada para o juiz ser vermelha será
a) $\frac{1}{6}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{2}{3}$.
d) $\frac{1}{2}$.

e) $\frac{3}{2}$.

10) Assinale a alternativa que apresenta equações paramétricas da reta r, sabendo-se que o ponto A, cujas coordenadas são $(2,-3,4)$, pertence a r e que r é ortogonal às retas $r_1:\begin{cases} x=-2+t \\ y=-t \\ z=-3 \end{cases}$ e $r_2:\begin{cases} y=-x-1 \\ z=3 \end{cases}$.

a) $r:\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{6}=4-z$

b) $r:\begin{cases} x=2+6t \\ y=-3+5t \\ z=4 \end{cases}$

c) $r:\begin{cases} y=x-5 \\ z=6-x \end{cases}$

d) $r:\begin{cases} x=2+6t \\ y=-3+3t \\ z=4 \end{cases}$

e) $r:\begin{cases} x=2+6t \\ y=-3+6t \\ z=4-t \end{cases}$

11) Assinale a alternativa que apresenta o polinômio P de grau mínimo, com coeficientes reais, de modo que $P(i)=2$ e $P(1+i)=0$.

a) $\frac{1}{5}(2x^3-3x^2-2x+2)$

b) $\frac{2}{5}(2x^3-3x^2-2x+2)$

c) $\frac{2}{5}(2x^3-3x^2+2x+2)$

d) $\frac{1}{5}(2x^3-3x^2-2x+2)$

e) $\frac{2}{3}(x^3-x^2-2x+3)$

12) Dada uma função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sabe-se que:

i) $F'(x)=\text{sen}(3x)\cos(5x)$, onde $F'(x)$ é a derivada da função F, em relação à variável independente x;

ii) $F(0)=0$.

O valor de $F\left(\frac{\pi}{16}\right)$ é

a) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$

c) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

d) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$

e) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

13) Os números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q. Nesse caso, é correto afirmar que a sequência $\log a_1, \log a_2, \ldots, \log a_n$ forma

a) uma progressão geométrica crescente, se $q > 1$.
b) uma progressão aritmética crescente, se $q > 1$.
c) uma progressão geométrica decrescente, se $0 < q < 1$.
d) uma progressão aritmética crescente, se $0 < q < 1$.
e) uma progressão aritmética crescente, desde que $q > 0$.

14) Um tanque em forma de cone circular de altura h encontra-se com vértice para baixo e com eixo na vertical. Esse tanque, quando completamente cheio, comporta 6000 litros de água. O volume de água, quando o nível está a $\frac{1}{4}$ da altura, é igual a

a) 1500 litros.
b) 150 litros.
c) $93,75$ litros.
d) 30 litros.
e) 125 litros.

15) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar em certo momento exatamente $\frac{1}{6}$ da superfície de um planeta. Determine a que distância ele está da superfície desse planeta. Considere o raio do planeta igual a 12800 km.

a) 1300 km
b) 1500 km
c) 1600 km
d) 3200 km
e) 6400 km

16) O valor da integral $\int x e^{x^2} dx$ é

a) $\frac{1}{4} \cdot e^{x^2} + c$

b) $\frac{x}{2} \cdot e^{x^2} + c$
c) $\frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + c$
d) $\frac{1}{2} \cdot e^{x} + c$
e) $\frac{1}{4} \cdot e^{x} + c$

17) O valor da expressão $\frac{\left(\frac{27}{64} \cdot 10^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{-4}{3}}}$ é

a) $\frac{25}{3}$
b) $\frac{3}{5}$
c) $\frac{6}{25}$
d) $\frac{6}{5}$
e) $\frac{3}{25}$

18) Sabe-se que uma partícula move-se segundo a equação $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t - 2$, onde t é o tempo em segundos e S é a posição em metros. Pode-se afirmar que a aceleração da partícula, quando t = 2 s, é
a) $3\,m/s^2$
b) $5\,m/s^2$
c) $7\,m/s^2$
d) $8\,m/s^2$
e) $10\,m/s^2$

19) Seja $A = (a_{ij})_{3\times3}$ uma matriz quadrada de ordem 3, onde cada termo é dado pela lei $a_{ij} = \begin{cases} -i + j, & \text{se } i + j \text{ é par} \\ i - j, & \text{se } i + j \text{ é ímpar} \end{cases}$. Pode-se afirmar que o valor de $\det A$ é
a) 0
b) -12
c) 12
d) 4
e) -4

20) Seja C uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano xy. Um ponto P do 1º quadrante fixado sobre C determina um segmento OP, onde O é a origem, que forma um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos com o eixo das abscissas. Pode-se afirmar que a reta tangente ao gráfico de C passando por P é dada por

a) $x+y-2=0$

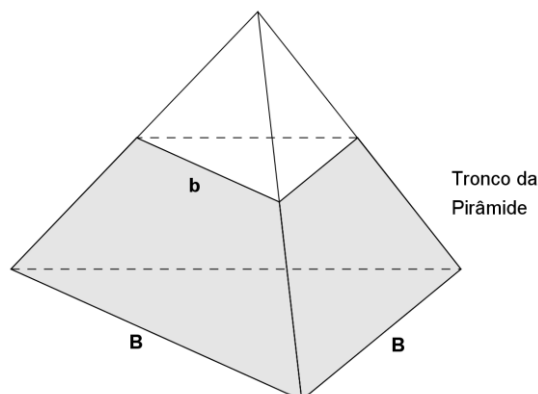
b) $\sqrt{2}x+y-1=0$

c) $-\sqrt{2}x+y-2=0$

d) $x+y-2\sqrt{2}=0$

e) $x-y-2\sqrt{2}=0$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2013/2014

1) A área lateral de um tronco de pirâmide triangular regular cujas bases são paralelas e têm áreas $25\sqrt{3}\text{ cm}^2$ e $4\sqrt{3}\text{ cm}^2$ e altura 4 cm é, em cm^2,

a) $19\sqrt{3}$
b) $25\sqrt{3}$
c) $15\sqrt{19}$
d) $21\sqrt{19}$
e) $25\sqrt{15}$

2) A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de 2 cm. Se a sua área é menor ou igual a 35 cm^2, então todos os possíveis valores de x, em cm, satisfazem:
a) $0 < x < 7$
b) $0 < x < 5$
c) $2 < x \le 5$
d) $2 < x \le 7$
e) $2 < x < 7$

3) Uma pesquisa indica a taxa de crescimento populacional de uma cidade através da função $P(x) = 117 + 200x$, por pessoas anualmente há x anos. Passados 10 anos, o crescimento é dado pela integral $\int_0^{10} (117 + 200x)\,dx$. Pode-se afirmar que esse crescimento será de
a) 10130 pessoas.
b) 11170 pessoas.
c) 11200 pessoas.
d) 11310 pessoas.
e) 12171 pessoas.

4) O valor da soma de a e b, para que a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$ seja exata, é
a) -1
b) 0
c) 1

d) 2
e) 3

5) Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$. Então, o produto P e a soma S de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg} x$ são, respectivamente,
a) $P = 1$ e $S = 0$
b) $P = 1$ e $S = 5$
c) $P = -1$ e $S = 0$
d) $P = -1$ e $S = 5$
e) $P = 1$ e $S = -5$

6) Suponha um lote de dez peças, sendo duas defeituosas. Testam-se as peças, uma a uma, até que sejam encontradas as duas defeituosas. A probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste é igual a
a) $1/45$
b) $2/45$
c) $1/15$
d) $4/45$
e) $1/9$

7) O limite da soma da expressão $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \cdots$ é igual a
a) $\frac{1}{7}$
b) $\frac{2}{7}$
c) $\frac{3}{7}$
d) $\frac{4}{7}$
e) $\frac{5}{7}$

8) Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{4 - ||2x - 1| - 6|}$ está definida, formam o conjunto
a) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$
b) $\left[-\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$
c) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right]$
d) $\left[-\frac{5}{2}, 0\right) \cup \left[0, \frac{7}{2}\right)$

e) $\left[-\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right]$

9) Os múltiplos de 5 são escritos na disposição abaixo:

COLUNA 1	COLUNA 2	COLUNA 3	COLUNA 4	COLUNA 5
5	10	15	20	25
30	35	40	45	50
55	60	65	70	75
80	85	90	95	100
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Caso esse padrão seja mantido indefinidamente, com certeza o número 745 pertencerá à
a) primeira coluna.
b) segunda coluna.
c) terceira coluna.
d) quarta coluna.
e) quinta coluna.

10) Se $g(x)=9x-11$ e $f(g(x))=g\left(\frac{x}{9}+1\right)$ são funções reais, então $f(16)$ vale

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

11) O determinante da matriz $A=(a_{ij})$, de ordem 2, onde:

$$a_{ij}=\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{2i-j}\right), & \text{se } i=j\\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{i+j}\right), & \text{se } i\neq j\end{cases}$$

é igual a
a) $+1/3$.
b) $-1/3$.
c) -3.
d) $+3$.
e) -1.

12) Sabendo que a velocidade de uma partícula, em m/s, é dada pela equação $v(t)=2+3\cdot t+5\cdot t^2$ (onde t é o tempo medido em segundos), pode-se afirmar que, no instante $t=5\,s$, sua aceleração é
a) $28\,m/s^2$
b) $30\,m/s^2$
c) $36\,m/s^2$
d) $47\,m/s^2$
e) $53\,m/s^2$

13) O valor da expressão $\left(16^{3/4} - \sqrt[4]{81^2}\right) \cdot 27^{-4/3}$ é

a) $(-1)^1 \cdot 2^{-3}$

b) $(-1)^2 \cdot 2^3$

c) $(-1)^3 \cdot 3^{-4}$

d) $(-1)^4 \cdot 2^{-4}$

e) $(-1)^5 \cdot 3^2$

14) O valor de x para resolver a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ é
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

15) A única alternativa **INCORRETA** é

a) $\lim_{x \to 2} \left(3x^2 - 5x + 2\right) = 4$

b) $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3}\right) = \frac{4}{7}$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - x + 2}{3x - 2}\right)^2 = 4$

d) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}\right) = 2$

e) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} = -2$

16) O valor de $\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt[3]{5+t} - \sqrt[3]{5}}{t}$ é

a) 0

b) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

d) $\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}$

e) ∞

17) Considere um triângulo retângulo de catetos 9 cm e 12 cm. A bissetriz interna relativa à hipotenusa desse triângulo mede, em cm,

a) $\frac{36}{7}\sqrt{2}$.

b) $\frac{25}{7}\sqrt{2}$
c) $\frac{4}{15}\sqrt{2}$
d) $\frac{7}{5}\sqrt{2}$
e) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

18) Seja $ax+by+cz+d=0$ a equação do plano que passa pelos pontos $(4,-2,2)$ e $(1,1,5)$ e é perpendicular ao plano $3x-2y+5z-1=0$. A razão $\frac{d}{b}$ é
a) $-\frac{5}{4}$.
b) $\frac{4}{7}$.
c) 8.
d) $-\frac{1}{2}$.
e) $\frac{2}{5}$.

19) Denotaremos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B, C conjuntos tais que $n(A\cup B)=14$, $n(A\cup C)=14$ e $n(B\cup C)=15$, $n(A\cup B\cup C)=17$ e $n(A\cap B\cap C)=3$. Então $n(A)+n(B)+n(C)$ é igual a
a) 18.
b) 20.
c) 25.
d) 29.
e) 32.

20) Sabendo-se que a raiz quadrada do número complexo $-16+30i$ é $(a+bi)$ ou $(c+di)$, onde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ e $a>0$, pode-se afirmar que o valor de $a+d$ é:
a) +2.
b) +1.
c) 0.
d) −1.
e) −2.

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2012/2013

1) O valor de $\lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2 + x} \right)$ é

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

2) O número de bactérias B, numa cultura, após t horas, é $B = B_0 \cdot e^{kt}$, onde k é uma constante real. Sabendo-se que o número inicial de bactérias é 100 e que essa quantidade duplica em $t = \frac{\ln 2}{2}$ horas, então o número N de bactérias, após 2 horas, satisfaz:
a) $800 < N < 1600$
b) $1600 < N < 8100$
c) $8100 < N < 128000$
d) $128000 < N < 256000$
e) $256000 < N < 512000$

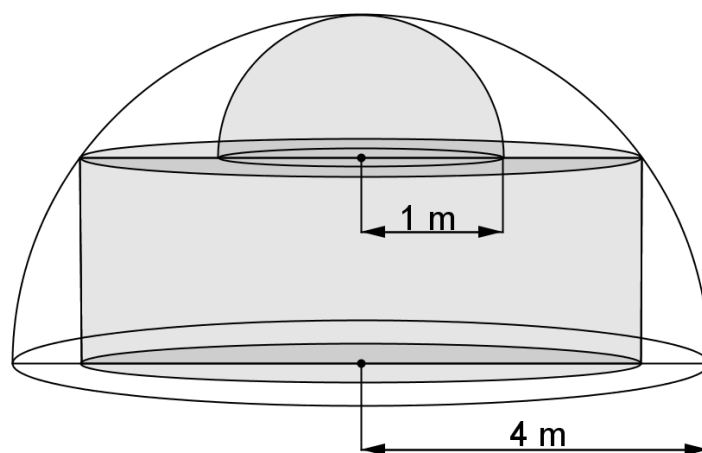
3) O gráfico de $f(x) = (x-3)^2 \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$, tem uma assíntota horizontal r. Se o gráfico de f intercepta r no ponto $P = (a, b)$, então $a^2 + b \cdot e^{\text{sen}^2 a} - 4a$ é igual a:
a) -3
b) -2
c) 3
d) 2
e) $\frac{1}{2}$

4) Num quadrado de lado a, inscreve-se um círculo; nesse círculo se inscreve um novo quadrado e nele um novo círculo. Repetindo a operação indefinidamente, tem-se que a soma dos raios de todos os círculos é:
a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$;
b) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$;
c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$;
d) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$;
e) $2a\left(\sqrt{2}+1\right)$.

5) Se os números reais x e y são soluções da equação $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$, então $5x + 15y$ é igual a:
a) 0

b) -1
c) 1
d) $\sqrt{2}$
e) $-\sqrt{2}$

6) Um cone foi formado a partir de uma chapa de aço, no formato de um setor de 12 cm de raio e ângulo central de 120°. Então, a altura do cone é:
a) $2\sqrt{2}$
b) $4\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$
e) $12\sqrt{2}$

7) Constrói-se um depósito, na forma de um sólido V, dentro de uma semiesfera de raio 4 m. O depósito é formado por uma semiesfera de raio 1 m sobreposta a um cilindro circular, dispostos conforme a figura. Então a área da superfície total de V, em m^2, é igual a:

a) $\left(20+14\sqrt{2}\right)\pi$.
b) $\left(17+4\sqrt{10}\right)\pi$.
c) $\left(8+4\sqrt{7}\right)\pi$.
d) $\left(21+7\sqrt{6}\right)\pi$.
e) $\left(15+6\sqrt{7}\right)\pi$.

8) A empresa Alfa Tecidos dispõe de 5 teares que funcionam 6 horas por dia, simultaneamente. Essa empresa fabrica 1800 m de tecido, com 1,20 m de largura em 4 dias. Considerando que um dos teares parou de funcionar, em quantos dias, aproximadamente, a tecelagem fabricará 2000 m do mesmo tecido, com largura 0,80 m, e com cada uma de suas máquinas funcionando 8 horas por dia?
a) 2 dias.
b) 3 dias.
c) 4 dias.
d) 5 dias.
e) 6 dias.

9) Se $\det\begin{vmatrix}\cos x & \text{sen}\, x\\ \text{sen}\, y & \cos y\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}$, então o valor de $3\text{sen}(x+y)+\text{tg}(x+y)-\sec(x+y)$, para $\frac{\pi}{2}\le x+y\le\pi$, é igual a:
a) 0
b) $\frac{1}{3}$
c) 2
d) 3
e) $\frac{1}{2}$

10) O valor da integral $\int \text{sen}\, x\cdot\cos x\, dx$ é:
a) $-\cos x+c$
b) $-\frac{1}{4}\cos 2x+c$
c) $-\frac{1}{2}\cos x+c$
d) $+\frac{1}{4}\cos x+c$
e) $+\frac{1}{2}\cos 2x+c$

11) Um muro será construído para isolar a área de uma escola que está situada a 2 km de distância da estação do metrô. Esse muro será erguido ao longo de todos os pontos P, tais que a razão entre a distância de P à estação do metrô e a distância de P à escola é constante e igual a $\sqrt{2}$.
Em razão disso, dois postes, com uma câmera cada, serão fixados nos pontos do muro que estão sobre a reta que passa pela escola e é perpendicular à reta que passa pelo metrô e pela escola. Então, a distância entre os postes, em km, será:
a) 2.
b) $2\sqrt{2}$.
c) $2\sqrt{3}$
d) 4.
e) $2\sqrt{5}$.

12) O gráfico da função contínua $y=f(x)$, no plano xy, é uma curva situada acima do eixo x para $x>0$ e possui a seguinte propriedade:
"A área da região entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x no intervalo $a\le x\le b$ $(a>0)$ é igual a área entre a curva e o eixo x no intervalo $ka\le x\le kb$ $(k>0)$".
Se a área da região entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x para x no intervalo $1\le x\le 3$ é o número A então a área entre a curva $y=f(x)$ e o eixo x no intervalo $9\le x\le 243$ vale:
a) 2A
b) 3A
c) 4A

d) 5A
e) 6A

13) O código Morse, desenvolvido por Samuel Morse, em 1835, é um sistema de representação que utiliza letras, números e sinais de pontuação através de um sinal codificado intermitentemente por pulsos elétricos, perturbações sonoras, sinais visuais ou sinais de rádio. Sabendo-se que o código Morse trabalha com duas letras pré-estabelecidas, ponto e traço, e codifica com palavras de 1 a 4 letras, o número de palavras criadas é:
a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 25.
e) 30.

14) Um ponto $P(x, y)$, no primeiro quadrante do plano xy, situa-se no gráfico de $y = x^2$. Se θ é o ângulo de inclinação da reta que passa por P e pela origem, então o valor da expressão $1+y$ (onde y é a ordenada de P) é:
a) $\cos\theta$.
b) $\cos^2\theta$.
c) $\sec^2\theta$.
d) $\text{tg}^2\theta$.
e) $\text{sen}\,\theta$.

15) A matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ define em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{v}_i = a_{i1}\vec{i} + a_{i2}\vec{j} + a_{i3}\vec{k}$, $1 \le i \le 3$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo:
- $\vec{u}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_2$ e $|\vec{u}| = 3$;
- $\vec{v}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_3$ e $|\vec{v}| = 2$.

Então, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:
a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}+1)\vec{k}\right)$
b) $3\sqrt{2}\left(\vec{i} - \vec{j} + (\sqrt{2}-1)\vec{k}\right)$
c) $3\left(\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k}\right)$
d) $2\sqrt{2}\left(\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + (1-\sqrt{2})\vec{k}\right)$
e) $-3\sqrt{2}\left(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k}\right)$

16) Se $\text{tg}\,x + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $\text{sen}\,x + \cos x$ vale:
a) $-\frac{7}{13}$
b) $\frac{5}{13}$

c) $\frac{12}{13}$
d) $\frac{15}{13}$
e) $\frac{17}{13}$

17) $P(x)$ é um polinômio de coeficientes reais e menor grau com as propriedades abaixo:

- os números $r_1 = 1$, $r_2 = i$ e $r_3 = 1 - i$ são raízes da equação $P(x) = 0$;
- $P(0) = -4$.

Então, $P(-1)$ é igual a:
a) 4
b) −2
c) −10
d) 10
e) −40

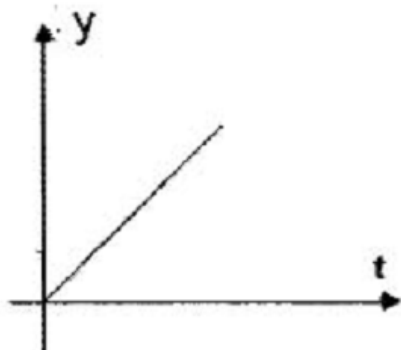
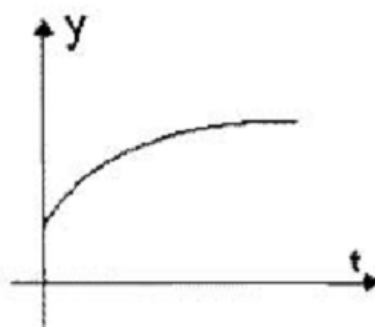
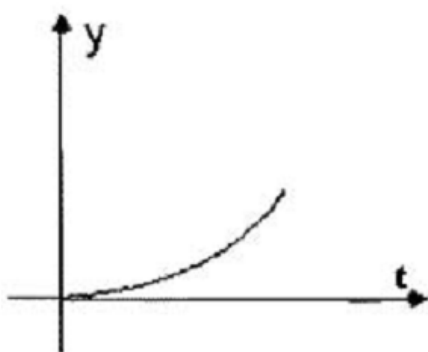
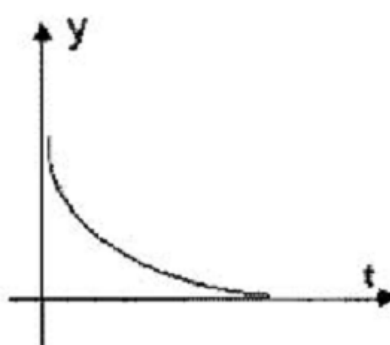
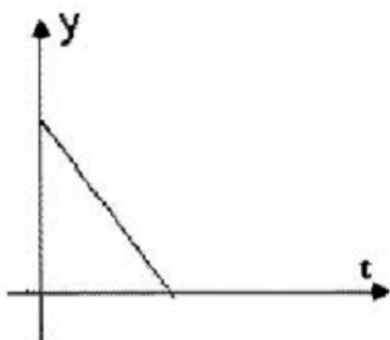
18) Durante o Treinamento Físico Militar na Marinha, o uniforme usado é tênis branco, short azul e camiseta branca. Sabe-se que um determinado militar comprou um par de tênis, dois shortes e três camisetas por R$ 100,00. E depois, dois pares de tênis, cinco shortes e oito camisetas por R$ 235,00. Quanto, então, custaria para o militar um par de tênis, um short e uma camiseta?
a) R$ 50,00.
b) R$ 55,00.
c) R$ 60,00.
d) R$ 65,00.
e) R$ 70,00.

19) Dois observadores que estão em posições coincidentes com os pontos A e B, afastados 3 km entre si, medem simultaneamente o ângulo de elevação de um balão, a partir do chão, como sendo 30° e 75°, respectivamente. Se o balão está diretamente acima de um ponto no segmento de reta entre A e B, então a altura do balão, a partir do chão, em km, é:
a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{5}{2}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{2}{3}$
e) $\frac{3}{2}$

20) O litro da gasolina comum sofreu, há alguns dias, um aumento de 7,7% e passou a custar 2,799 reais. Já o litro do álcool sofreu um aumento de 15,8%, passando a custar 2,199 reais. Sabendo que o preço do combustível é sempre cotado em milésimos de real, pode-se afirmar, aproximadamente, que a diferença de se abastecer um carro com 10 litros de gasolina e 5 litros de álcool, antes e depois do aumento, é de:
a) R$ 2,00.
b) R$ 2,50.
c) R$ 3,00.
d) R$ 3,50.
e) R$ 4,00.

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2011/2012

1) Considere-se o conjunto universo U, formado por uma turma de cálculo da Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM) e composta por alunos e alunas. São dados os subconjuntos de U:
A: conjunto formado pelos alunos; e
B: conjunto formado por todos os alunos e alunas aprovados.
Pode-se concluir que $C_U^B - (A - B)$ é a quantidade de
a) alunos aprovados.
b) alunos reprovados.
c) todos os alunos e alunas aprovados.
d) alunas aprovadas.
e) alunas reprovadas.

2) O lucro obtido pela venda de cada peça de roupa é $x-10$, sendo x o preço da venda e 10 o preço do custo. A quantidade vendida por mês é igual a $70-x$. O lucro mensal máximo obtido com a venda do produto é:
a) 1200 reais.
b) 1000 reais.
c) 900 reais.
d) 800 reais.
e) 600 reais.

3) Em radioatividade, na função $A(t) = A_0 \cdot e^{-\varphi t}$, temos que:
I. A é a quantidade de substância radioativa ainda existente, no instante t;
II. φ é a constante de desintegração e $\varphi > 0$;
III. A_0 é a amostra inicial no instante t_0; e
IV. t é o tempo.
De acordo com as informações acima, o gráfico que melhor representa a função $y(t) = Ln(A(t))$ é:

4) Um recipiente na forma de um cilindro circular reto contém um líquido até um certo nível. Colocando-se nesse recipiente uma esfera, o nível do líquido aumenta 2 cm. Sabendo-se que o raio do cilindro mede $3\sqrt{2}$ cm, conclui-se que o raio da esfera, em cm, mede:
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

5) Um professor escreveu no quadro-negro uma equação do segundo grau e pediu que os alunos a resolvessem. Um aluno copiou errado o termo constante da equação e achou as raízes −3 e −2. Outro aluno copiou errado o coeficiente do termo do primeiro grau e achou as raízes 1 e 4. A diferença positiva entre as raízes da equação correta é:
a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

6) Se $f_0(x) = \frac{x}{x+1}$ e $f_{n+1} = f_o \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ então $f_n(x)$ vale:
a) $\frac{x}{x+n}$
b) $\frac{(n+1)x}{x+1}$

c) $\frac{nx}{x+1}$
d) $\frac{x}{(n+1)x+1}$
e) $\frac{x}{nx+1}$

7) O conjunto solução da inequação $\frac{\log_{10}\left(x^2+\frac{3}{4}\right)}{(x+1)^3\cdot(1-x)^2}\geq 0$ é:

a) $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$
b) $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\cup\left]\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right[$
c) $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$
d) $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$
e) $\left]-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right[$

8) Considere a sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 4^{3-n} + i\cdot 4^{4-n}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Se i é a unidade imaginária, o módulo da soma dos infinitos termos dessa sequência é

a) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$
b) $\frac{(2^2)\sqrt{7}}{3}$
c) $\frac{(2^3)\sqrt{17}}{3}$
d) $\frac{(2^4)\sqrt{17}}{3}$
e) $\frac{(2^6)\sqrt{17}}{3}$

9) Os números inteiros de 1 a 500 são escritos na disposição abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

A escrita se repete, na mesma disposição, a cada vez que se atinge o valor 500. O número escrito na quarta coluna da 134ª linha é

a) 158
b) 159
c) 160
d) 169
e) 170

10) O valor do $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \right)$ é:

a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$
b) $\sqrt{a}$
c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$
d) $2\sqrt{a}$
e) 0

11) De todos os empregados de uma empresa de navegação, 31% optaram por um plano de assistência odontológica. A firma tem a matriz na capital e somente duas filiais, uma em Macaé e a outra em Piraí. Sabe-se que 50% dos empregados trabalham na matriz, 20% dos empregados trabalham na filial Macaé, 30% dos empregados da capital optaram pelo plano de assistência odontológica e que 35% dos empregados da filial de Macaé também fizeram tal opção. Qual é, então, a porcentagem dos empregados da filial de Piraí que optaram pelo plano?
a) 40%
b) 35%
c) 30%
d) 25%
e) 15%

12) Em uma indústria é fabricado um produto ao custo de R$ 9,00 a unidade. O proprietário anunciou a venda desse produto ao preço de x reais, para que pudesse, ainda que dando ao comprador um desconto de 10% sobre o preço anunciado, obter um lucro de 40% sobre o preço unitário de custo. Nessas condições, o valor de x é
a) 14 reais.
b) 12 reais.
c) 10 reais.
d) 8 reais.
e) 6 reais.

13) Se θ é o menor ângulo formado pelas retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 9$ nos pontos $P = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right)$ e $Q = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2} \right)$ então o valor de θ, em radianos, é

a) $\frac{\pi}{12}$
b) $\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{5\pi}{12}$
e) $\frac{7\pi}{12}$

14) A área entre o gráfico de $y = ||3x+2|-3|$ e a reta $y = 3$, em unidades de área, vale:
a) 6
b) 3
c) 1,5
d) 2
e) 0,5

15) Os números que exprimem o cateto, a hipotenusa e a área de um triângulo retângulo isósceles estão em progressão aritmética, nessa ordem. O cateto do triângulo, em unidades de comprimento, vale:
a) $2\sqrt{2}-1$
b) $2\sqrt{2}-2$
c) $4\sqrt{2}-2$
d) $4\sqrt{2}-4$
e) $4\sqrt{2}-1$

16) A solução da equação $|z| + z = 1 + 3i$ é um número complexo de módulo:
a) $\frac{5}{4}$
b) 5
c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{5}{2}$

17) O gráfico da função $f(x) = \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right) - \frac{\pi}{5}\right] \cdot \left[-x - \frac{\pi}{7}\right]$ intercepta o eixo x nos pontos de coordenadas:
a) $\left(-\frac{\pi}{7}, 0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{5}, 0\right)$
b) $\left(-\frac{\pi}{7}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5}, 0\right)$
c) $\left(\frac{\pi}{7}, 0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5}, 0\right)$
d) $\left(0, -\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0, \frac{\pi}{5}\right)$

e) $\left(0,\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0,-\frac{\pi}{5}\right)$

18) O valor de λ na equação $y^3-61y^2+\lambda y-5832=0$ de modo que suas raízes estejam em progressão geométrica, é:
a) 1017
b) 1056
c) 1078
d) 1098
e) 1121

19) Sabendo que o polinômio $P(x)=x^3+kx^2+px-9$ é divisível por $D(x)=x^2-3$, podemos afirmar que:
a) $p+k=-3$
b) $\frac{p}{k}=-1$
c) $p+k=-9$
d) $p\in\mathbb{N}$ e $\sqrt{k}\in\mathbb{R}$
e) $p^k=\sqrt[4]{3}$

20) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} x & 2-x & 1 \\ 2 & 3x+1 & -1 \\ -4x+1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então o valor de f no ponto de abscissa 1, onde $f(x)=\det(A)$, é:
a) 18
b) 21
c) 36
d) 81
e) 270

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2010/2011

1) Se $a=\sqrt[4]{3}$, $b=\frac{61}{50}$ e $c=1,22222\ldots$, assinale a opção correta.

a) $a<c<b$
b) $a<b<c$
c) $c<a<b$
d) $b<a<c$
e) $b<c<a$

2) Sabendo-se que $f(0)=3$ e $f(n+1)=f(n)+7$, então $f(201)$ é igual a:
a) 1206
b) 1307
c) 1410
d) 1510
e) 1606

3) Seja a função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ (sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais) com a seguinte propriedade definida por $f(x-1)+1=\frac{f(x-1)-1}{f(x)}$. Sabendo-se que $f(0)=4$, o valor de $f(1007)$ é igual a
a) -1
b) 4
c) $-\frac{1}{4}$
d) $-\frac{5}{3}$
e) $\frac{3}{5}$

4) O conjunto solução da inequação $\frac{1+x}{1-x}\geq 1$ é:
a) $[0,+\infty)$
b) $[0,1)$
c) $(1,+\infty)$
d) $[0,1]$
e) $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

5) Se a sequência de inteiros positivos $(2,x,y)$ é uma Progressão Geométrica e $(x+1,y,11)$ uma Progressão Aritmética, então, o valor de $x+y$ é
a) 11
b) 12
c) 13
d) 14

e) 15

6) Sejam A, B e C matrizes de ordem 3×3 inversíveis tais que $\det A^{-1}=3$ e $\det\left((AB)^{-1}+\frac{1}{2}I\right)=4$.

Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que $I=-3C^{-1}\left(2B^{-1}+A\right)^{T}$, o determinante de C é igual a

a) $-8/3$

b) $-32/3$

c) -9

d) -54

e) -288

7) Um carro percorre 240 km com o desempenho de 12 km por litro de gasolina. Ao utilizar álcool como combustível, o desempenho passa a ser 8 km por litro de álcool. Sabendo que o litro de gasolina custa R$ 2,70, qual deve ser o preço do litro de álcool para que o gasto ao percorrer a mesma distância seja igual ao gasto que se tem ao utilizar gasolina como combustível?

a) R$ 1,60

b) R$ 1,65

c) R$ 1,72

d) R$ 1,75

e) R$ 1,80

8) Dada a equação $x^2+y^2-4x+10y+25=0$, assinale a opção que apresenta a distância do centro da curva à origem do sistema de coordenadas.

a) 5

b) 6

c) 8

d) $\sqrt{24}$

e) $\sqrt{29}$

9) Analise a função a seguir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ 3p-5, & x=2\end{cases}$$

Para que a função acima seja contínua no ponto $x=2$, qual deverá ser o valor de p?

a) $1/3$

b) 1

c) 3

d) -1

e) -3

10) Sejam os números complexos z tais que $\frac{1}{3}|z|=|\overline{z+1}|$. O lugar geométrico das imagens desses números complexos é uma

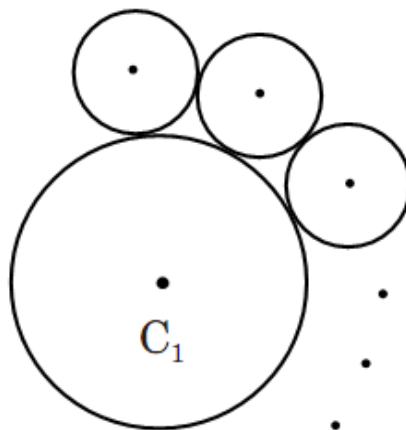
a) parábola.

b) reta.

c) circunferência de raio $3/8$.
d) circunferência de raio $3/2$.
e) hipérbole.

11) A divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x-4)$ deixa resto 3, por $(x+1)$ deixa resto 8 e por $(x-2)$ deixa resto -1. O resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x-4)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ tem como soma dos coeficientes
a) -24
b) 9
c) -3
d) 0
e) -4

12) A circunferência de equação $\left(x-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y+\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2=4+2\sqrt{2}$ intercepta o eixo das abscissas em dois pontos A e B. Sabendo que o segmento AB é o lado de um polígono regular convexo que possui centro coincidente com o centro da circunferência, calcule o perímetro desse polígono.
a) 24
b) 16
c) 15
d) $6\left(\sqrt{2}+1\right)$
e) $6\left(\sqrt{2}+2\right)$

13) Analise a figura a seguir.

Seja o círculo C_1 de raio R, onde estão dispostos n círculos tangentes exteriores a C_1, todos com raios iguais a $\frac{2}{3}R$, como mostra a figura acima. Assinale a opção que representa o valor máximo de n. (Dado: $\arccos\frac{\sqrt{21}}{5}\cong 0,41\,\text{rad}$)
a) 7
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

14) Um projétil é lançado de baixo para cima e a sua trajetória descreve uma curva plana de equação $h = 27t - 3t^2$, onde h é a altura em cada momento, em função do tempo. Sabendo que h está em quilômetros e t em minutos, qual será a altura máxima atingida por esse projétil?
a) $6,075 \times 10$ km
b) $6,75 \times 10$ km
c) $60,75 \times 10$ km
d) $67,5 \times 10$ km
e) 675×10 km

15) Seja uma pirâmide quadrangular regular com arestas iguais a 2 cm. No centro da base da pirâmide, está centrada uma semiesfera que tangencia as arestas da pirâmide. Existe uma esfera de maior raio, que está apoiada externamente em uma face lateral da pirâmide e tangencia internamente a superfície curva da semiesfera. Essa esfera possui volume, em cm^3, igual a
a) $\pi \cdot \frac{27 - 11\sqrt{6}}{54}$
b) $\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{24}$
c) $\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{24}$
d) $\pi \cdot \frac{108 - 44\sqrt{6}}{27}$
e) $\pi \cdot \frac{2}{3}$

16) Um hexágono regular de lado igual a 8 cm está inscrito na base de um cone de revolução de volume igual a 128π cm^3. A razão entre a área total do cone e a área total de um cilindro, com o mesmo volume e a mesma base do cone, é de
a) 0,3
b) 0,6
c) 0,9
d) 0,27
e) 0,36

17) Se $\{a, b, c\}$ é o conjunto solução da equação $x^3 - 13x^2 + 47x - 60 = 0$, qual o valor de $a^2 + b^2 + c^2$?
a) 263
b) 240
c) 169
d) 75
e) 26

18) Seja p e q números reais, tais que, $p \neq -q$ e $p \cdot q \neq 0$, a expressão $\frac{(p+q)^{-1} \cdot (q^{-2} - p^{-2})}{p^{-2} \cdot q^{-2}}$ é equivalente a:

a) $p^{-1} + q^{-1}$
b) $p \cdot q$
c) $p + q$
d) $p^{-1} + q^{-2} \cdot p$
e) $p - q$

19) Seja um container, no formato de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c, a maior distância entre dois vértices da paralelepípedo é igual a $6\sqrt{5}\text{ m}$. É correto afirmar que metade de sua área total, em m^2, vale (dado: $a + b + c = 22\text{ m}$)

a) 120
b) 148
c) 152
d) 188
e) 204

20) Sejam x, y e z números reais positivos onde $x + y = 1 - z$, e sabendo-se que existem ângulos α e β onde $x = \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta$ e $y = \cos^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \beta$, é correto afirmar que o valor mínimo da expressão $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{z}{x+y}$ é

a) 6
b) $6 + 2\sqrt{2}$
c) 12
d) $9 + 2\sqrt{2}$
e) $12 + 2\sqrt{2}$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2009/2010

1) Analise as afirmativas abaixo.
I – Seja K o conjunto dos quadriláteros planos, seus subconjuntos são:
P = { $x \in K$ | x possui lados opostos paralelos};
L = { $x \in K$ | x possui 4 lados congruentes};
R = { $x \in K$ | x possui 4 ângulos retos}; e
Q = { $x \in K$ | x possui 4 lados congruentes e 2 ângulos com medidas iguais}.
Logo, $L \cap R = L \cap Q$.
II – Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, nota-se que A possui somente 4 subconjuntos.
III – Observando as seguintes relações entre conjuntos: $\{a, b, c, d\} \cup Z = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup Z = \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap Z = \{c\}$; pode-se concluir que $Z = \{a, c, e\}$.
Em relação às afirmativas acima, assinale a opção correta:
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

2) Considere a função real f, definida por $f(x) = -\frac{2}{x}$ e duas circunferências C_1 e C_2, centradas na origem. Sabe-se que C_1 tangencia o gráfico de f, e que um ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ pertence a C_2 e ao gráfico de f. Nessas condições, a área da coroa circular, definida por C_1 e C_2, é igual a
a) $\frac{65}{4}\pi$
b) $\frac{49}{4}\pi$
c) $\frac{25}{4}\pi$
d) $\frac{9}{4}\pi$
e) $\frac{\pi}{4}$

3) Considere a equação de incógnita real x: $2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos 4x$. Se $x_0 \in (0; \pi)$ é uma de suas soluções e x_0 centímetros é a medida da diagonal de um cubo, então a área da superfície total desse cubo, em cm^2, é igual a
a) $\frac{3}{8}\pi^2$
b) $\frac{1}{2}\pi^2$
c) 6

d) $\frac{27}{8}\pi^2$

e) $6\pi^2$

4) O valor numérico da expressão $\frac{\cos\frac{44\pi}{3} - \sec 2400^\circ + \text{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\text{cossec}^2\left(-780^\circ\right)}$ é igual a

a) 1

b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{8}$

5) João construiu um círculo de papel com centro O e raio 4 cm (Figura 1). Traçou dois diâmetros AC e BD perpendiculares e, em seguida, dobrou o papel fazendo coincidir A, O e C, conforme sugere Figura 2.

A área da parte do círculo não encoberta pelas dobras, sombreada na figura 2, é igual a

a) $\frac{1}{3}(96 - 16\pi)\text{cm}^2$

b) $\frac{1}{3}(16\pi - 48)\text{cm}^2$

c) $\frac{1}{3}\left(16\pi - 12\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

d) $\frac{1}{3}\left(16\pi + 12\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

e) $\frac{1}{3}\left(48\sqrt{3} - 16\pi\right)\text{cm}^2$

6) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função estritamente decrescente, o que significa que para quaisquer x_1 e x_2 reais, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.
I – f é injetora.
II – f pode ser uma função par.
III – Se f possui inversa, então sua inversa é estritamente decrescente.
Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
d) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.
e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

7) Sejam as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3 & 7\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ e $X=A\cdot B$. O determinante da matriz $2\cdot X^{-1}$ é igual a
a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{3}$
c) 1
d) $\frac{8}{3}$
e) 6

8) Considere o conjunto dos números complexos Z com a propriedade $|Z+169i|\le 65$, admitindo que i é a unidade imaginária. O elemento desse conjunto que possui o maior argumento θ, $0\le\theta<2\pi$, é igual a
a) $60-144i$
b) $65-169i$
c) $-104i$
d) $-65-169i$
e) $65-156i$

9) A equação $\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$ tem uma solução positiva x_1. O número de divisores inteiros positivos de x_1 é
a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

10) Sabendo que $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, que opção representa $\log_{10} 2$?

a) $\frac{1-a-b}{2+a}$

b) $\frac{1-a-b}{a-1}$

c) $\frac{1-a-b}{1+a}$

d) $\frac{1-a-b}{2-a}$

e) $\frac{1-a-b}{1-a}$

11) Os pontos $A(-4;10/3)$, $B(-4;0)$, $C(0;0)$ e $D(0;b)$ são vértices de um quadrilátero circunscrito a uma circunferência. A equação da reta AD é representada por

a) $y = \frac{5}{12}x + 5$

b) $y = \frac{4}{3}$

c) $y = \frac{12}{5}x + 1$

d) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

e) $y = \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}$

12) Sejam ABC e BCD dois triângulos retângulos congruentes, contidos em planos perpendiculares, com hipotenusas $\overline{AC} = \overline{BD} = 8\text{ m}$ e cateto $\overline{AB} = 4\text{ m}$. O volume, em m^3, do tetraedro ABCD definido pelos vértices desses triângulos é igual a

a) $16\sqrt{3}$

b) $8\sqrt{3}$

c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{32}{3}$

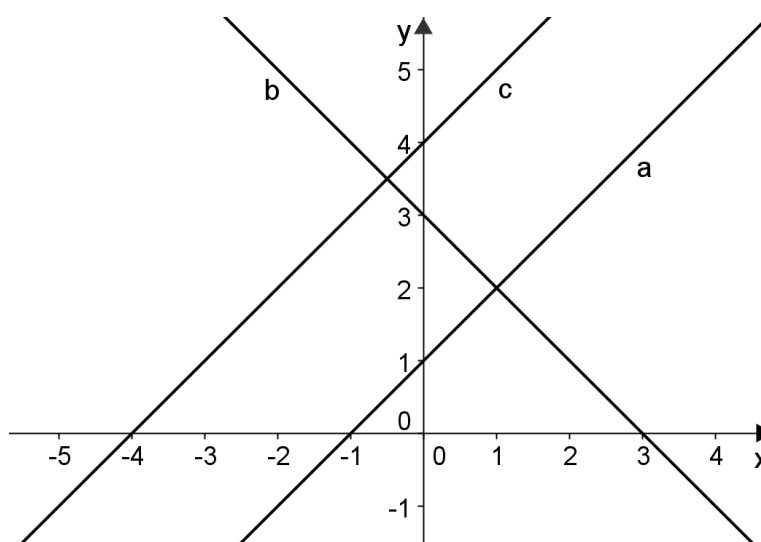
e) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

13) As medidas dos lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ de um triângulo ABC forma, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente. Os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ desse triângulo possuem a seguinte propriedade: $\text{sen}^2\hat{A} + \text{sen}^2\hat{B} - \text{sen}^2\hat{C} - 2\cdot\text{sen}\hat{A}\cdot\text{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = \cos^2\hat{C}$. Se o perímetro do triângulo ABC mede $3\sqrt{3}\text{ m}$, sua área, em m^2, é igual a

a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{9}{8}$
d) 2
e) 4

14) Um triângulo isósceles ABC, com lados $AB = AC$ e base BC, possui a medida da altura relativa à base igual à medida da base acrescida de 2 metros. Sabendo que o perímetro do triângulo é igual a 36 metros, pode-se afirmar que sua base mede
a) 8 metros.
b) 9 metros.
c) 10 metros.
d) 11 metros.
e) 12 metros.

15) O gráfico das três funções polinomiais do 1° grau a, b e c definidas, respectivamente, por $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$, estão representadas abaixo.

Nessas condições, o conjunto solução da inequação $\frac{(a(x))^5 \cdot (b(x))^6}{(c(x))^3} \geq 0$ é

a) $(-4;-1) \cup [3;+\infty)$
b) $[-4;-1] \cup [3;+\infty)$
c) $(-\infty;-4) \cup [-1;+\infty)$
d) $[4;+\infty)$
e) $\mathbb{R} - \{4\}$

16) Um triângulo obtusângulo ABC tem 18 cm de perímetro e as medidas de seus lados formam uma progressão aritmética crescente $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}\right)$. Os raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo ABC medem, respectivamente, r e R. Se $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, então o produto $r \cdot R$, em cm^2, é igual a

a) $\frac{35}{9}$

b) $6\sqrt{6}$

c) $3\sqrt{15}$

d) $\frac{16}{3}$

e) 1

17) Seja f uma função de domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{a\}$. Sabe-se que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.

I – Seja $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$, logo, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

II – Na função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, tem-se $\lim_{x \to 1} f(x) = -3$.

III – Sejam f e g funções quaisquer, pode-se afirmar que $\lim_{x \to a} (f \cdot g)^n (x) = (L \cdot M)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

18) A expressão $6 \cdot n + n^2$ representa a soma dos n primeiros termos de uma sequência numérica. É correto afirmar que essa sequência é uma progressão

a) aritmética de razão 3.
b) aritmética de razão 4.
c) aritmética de razão 2.
d) geométrica de razão 4.
e) geométrica de razão 2.

19) Se X é um conjunto com um número finito de elementos, $n(X)$ representa o número de elementos do conjunto X. Considere os conjuntos A, B e C com as seguintes propriedades:

- $n(A \cup B \cup C) = 25$;
- $n(A - C) = 13$;
- $n(B - A) = 10$;
- $n(A \cap C) = n(C - (A \cup B))$.

O maior valor possível de $n(C)$ é igual a
a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13

20) Um recipiente tem a forma de um paralelepípedo retângulo com altura h e base quadrada. Ele está com uma certa quantidade de água até uma altura h_1. Duas esferas, ambas com diâmetros iguais a 2 dm, forma colocadas dentro do recipiente, ficando esse recipiente com o nível de água até a borda (altura h). Considerando que o volume do paralelepípedo retângulo é de 40 litros, pode-se afirmar que a razão $\frac{h_1}{h}$, utilizando $\pi = 3$, vale:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2008/2009

1) Qual é o número inteiro cujo produto por 9 é um número natural composto apenas pelo algarismo 1?
a) 123459
b) 1234569
c) 12345679
d) 12345789
e) 123456789

2) O logotipo de uma certa Organização Militar é uma pedra semipreciosa, cujo valor é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa em gramas. Suponha que a pedra de 8 gramas, infelizmente, tenha caído partindo-se em dois pedaços. Qual é o prejuízo, em relação ao valor inicial, sabendo-se que foi o maior possível?
a) 18%
b) 20%
c) 50%
d) 80%
e) 90%

3) Numa embarcação é comum ouvirem-se determinados tipos de sons. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um desses sons estejam relacionados com a equação logarítmica $\beta = 12 + \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I em watts por metro quadrado. Qual é a razão $\frac{I_1}{I_2}$, sabendo que I_1 corresponde ao ruído sonoro de 8 decibéis de uma aproximação de dois navios e que I_2 corresponde a 6 decibéis no interior da embarcação?
a) 0,1
b) 1
c) 10
d) 100
e) 1000

4) Duas pessoas estão na beira da praia e conseguem ver uma lancha B na água. Adotando a distância entre as pessoas como $\overline{P_1P_2}$ sendo 63 metros, o ângulo $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$, $B\hat{P}_2P_1 = \beta$, $\text{tg}\alpha = 2$ e $\text{tg}\beta = 4$. A distância da lancha até a praia vale
a) 83
b) 84
c) 85
d) 86
e) 87

5) Tem-se um contêiner no formato cúbico, onde o ponto P descreve o centro desse contêiner e o quadrado ABCD a parte superior dele. Considerando-se o ΔAPC, o seno do ângulo $A\hat{P}C$ vale
a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
e) $3\sqrt{2}$

6) A equação $2^{-x}+\cos(\pi-x)=0$ tem quantas raízes no intervalo $[0, 2\pi]$?
a) zero.
b) uma.
c) duas.
d) três.
e) quatro.

7) Considerando-se a função clássica $f(x)=\text{arcsen } x$ e a sua inversa $g(x)=f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de $f\circ g$ e $g\circ f$ são
a) iguais.
b) diferentes, mas o de $f\circ g$ está contido no de $g\circ f$.
c) diferentes, mas o de $g\circ f$ está contido no de $f\circ g$.
d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.
e) diferentes e de intersecção vazia.

8) Após a determinação dos valões numéricos de $p(-1)$, $p(0)$ e $p(1)$, verifica-se que o polinômio $p(x)=x^3+x^2-x-0,5$ tem
a) apenas uma raiz real.
b) apenas duas raízes reais.
c) três raízes reais, todas do mesmo sinal.
d) três raízes reais, duas positivas e uma negativa.
e) três raízes reais, duas negativas e uma positiva.

9) Dado o sistema de equações lineares $S:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$. Sabendo-se que os determinantes $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ são todos iguais a zero, apenas pode-se concluir que S
a) é determinado.
b) não é determinado.
c) admite a solução $(0,0,0)$.
d) não é impossível.
e) não é indeterminado.

10) A, B e C são pontos consecutivos no sentido anti-horário de uma circunferência de raio r. O menor arco AB tem comprimento igual a r. Tomando-se como unidade u a medida do ângulo agudo $A\hat{C}B$, qual é o valor do seno de $\frac{\pi}{6}u$?

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

11) A progressão geométrica $(x-3, x+1, \ldots)$ de termos reais não nulos admite um limite para a soma dos seus infinitos termos se, e somente se,

a) $x>1$
b) $x<1$
c) $x>3$
d) $x<3$
e) $1<x<3$

12) Sabendo-se que duas circunferências secantes são ortogonais quando as respectivas retas tangentes nos seus pontos de interseção são perpendiculares, qual é a equação da circunferência centrada em $(3,5)$ que é ortogonal à circunferência $x^2+y^2-6x-7=0$?

a) $x^2+y^2-6x-10y+20=0$

b) $x^2+y^2-6x-10y+24=0$

c) $x^2+y^2-6x-10y+25=0$

d) $x^2+y^2-6x-10y+28=0$

e) $x^2+y^2-6x-10y+30=0$

13) Em uma progressão aritmética cujo número de termos é ímpar a soma dos termos de ordem ímpar é 573, e a soma dos termos de ordem par é 549. Quanto vale a soma de dois termos equidistantes dos extremos dessa progressão?

a) 12
b) 24
c) 48
d) 56
e) 68

14) Dois dos lados de um hexágono regular estão contidos nas retas definidas pelas equações $4x+3y+28=0$ e $8x+6y+15=0$, respectivamente. A área desse hexágono é um número entre

a) 13 e 14

b) 14 e 15
c) 15 e 16
d) 16 e 17
e) 17 e 18

15) Qual é o menor valor do número natural positivo n para que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$, onde i é a unidade imaginária, seja um número real?
a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

16) Se o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ é 5, então $\begin{vmatrix} a & a+b & 3c \\ d & d+e & 3f \\ g & g+h & 3i \end{vmatrix}$ é igual a
a) zero
b) cinco.
c) quinze.
d) trinta.
e) quarenta e cinco.

17) Os domínios das funções reais $f(x)=\log x^2$ e $g(x)=2\cdot\log x$ são D_1 e D_2, respectivamente. Sendo assim, pode-se afirma que
a) $D_1 = D_2$
b) $D_1 \neq D_2$, mas $D_1 \subset D_2$.
c) $D_1 \neq D_2$, mas $D_2 \subset D_1$.
d) $D_1 \neq D_2$ e $D_1 \cap D_2 = \varnothing$
e) $D_1 \not\subset D_2$, $D_2 \not\subset D_1$ e $D_1 \cap D_2 = \varnothing$

18) Todos os anos uma fábrica aumenta a produção em uma quantidade constante. No 5º ano de funcionamento, ela produziu 1460 peças, e no 8º ano, 1940. Quantas peças, então, ela produziu no 1º ano de funcionamento?
a) 475
b) 520
c) 598
d) 621
e) 820

19) Na construção de um prédio, para levar água da cisterna até a caixa superior, foram usados canos de ferro de duas polegadas. Considerando os seguintes dados abaixo, qual a massa aproximada de cada um desses canos? Use $\pi = 3{,}14$.
Comprimento de um cano: 6 m
Diâmetro externo: 5 cm
Diâmetro interno: 4,4 cm
Densidade do ferro: $7{,}8\ g/cm^3$

a) 16.720 g
b) 17.750 g
c) 18.920 g
d) 20.720 g
e) 21.550 g

20) Dividindo-se o polinômio $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + mx + t$ por $g(x) = x^2 + 2$, obtém-se resto $r(x) = 4x - 2$. Nessas condições, m e t são números reais tais que
a) $m = -3$ e $t = 6$.
b) $m = -2$ e $t = -10$.
c) $m = -1$ e $t = -2$.
d) $m = 1$ e $t = -5$.
e) $m = 2$ e $t = 10$.

CAPÍTULO 2
RESPOSTAS E CLASSIFICAÇÃO DAS QUESTÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2015/2016

1) e (Probabilidade)
2) d (Integral)
3) a (Função quadrática)
4) b (Limite)
5) c (Equações polinomiais)
6) e (Equações polinomiais)
7) d (Números complexos)
8) b (Trigonometria no triângulo retângulo)
9) a (Geometria plana - circunferência)
10) d (Geometria analítica – reta)
11) a (Progressões)
12) c (Função modular)
13) a (Geometria analítica – circunferência)
14) d (Análise combinatória)
15) c (Função exponencial)
16) e (Progressões)
17) c (Números complexos)
18) b (Equações polinomiais)
19) a (Progressões)
20) e (Geometria espacial)

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2014/2015

1) b (Progressão geométrica e triângulos)
2) d (Limites e equação trigonométrica)
3) c (Números complexos)
4) e (Geometria Analítica – coordenadas no plano)
5) d (Análise combinatória)
6) d (Funções)
7) b (Determinantes)
8) a (Geometria plana e função quadrática)
9) b (Probabilidade)
10) e (Geometria analítica no espaço)
11) c (Polinômios)
12) c (Integral)
13) b (Progressões)
14) c (Geometria Espacial)
15) e (Geometria Espacial)
16) c (Integral)
17) e (Potências e raízes)
18) b (Derivada)
19) a (Matrizes e determinantes)

20) d (Geometria analítica – reta)

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2013/2014

1) d (Geometria Espacial – pirâmides)
2) d (Geometria Plana – áreas e Trinômio do 2° grau)
3) b (Integral)
4) a (Polinômios)
5) b (Trigonometria)
6) b (Probabilidade)
7) c (Progressão geométrica)
8) e (Função e inequação modular)
9) d (Progressão aritmética)
10) a (Função composta)
11) c (Matrizes e determinantes)
12) e (Derivada – aplicações)
13) c (Potenciação e radiciação)
14) a (Equação exponencial)
15) c (Limites)
16) d (Limites)
17) a (Geometria Plana – relações métricas nos triângulos)
18) a (Geometria Analítica no $\mathbb{R}^3$ − plano)
19) c (Conjuntos)
20) e (Números complexos)

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2012/2013

1) d (Limite)
2) b (Função exponencial)
3) a (Cálculo diferencial – gráfico de funções)
4) c (Progressões)
5) b (Números complexos)
6) d (Geometria espacial – cone)
7) e (Geometria espacial – cilindro e esfera)
8) b (Regra de três)
9) d (Trigonometria)
10) b (Integral)
11) d (Trigonometria no triângulo retângulo)
12) b (Integral)
13) e (Análise combinatória)
14) c (Geometria analítica – reta)
15) a (Vetores)
16) e (Trigonometria)
17) e (Polinômios)
18) d (Sistemas lineares)
19) e (Trigonometria no triângulo retângulo)
20) d (Operações com mercadorias)

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2011/2012

1) d (Conjuntos)
2) c (Função quadrática)
3) e (Logaritmo)
4) b (Geometria espacial – volume do cilindro e da esfera)
5) c (Equação do 2º grau)
6) d (Função composta)
7) a (Inequação produto-quociente e logaritmo)
8) e (Progressões e números complexos)
9) d (Progressões)
10) c (Limite)
11) c (Médias)
12) a (Operações com mercadorias)
13) d (Geometria analítica – circunferência)
14) a (Função modular)
15) c (Progressões)
16) b (Números complexos)
17) a (Funções trigonométricas inversas)
18) d (Equação polinomial)
19) b (Polinômios)
20) b (Determinantes)

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2010/2011

1) e (Conjuntos numéricos)
2) c (Progressões)
3) d (Função composta)
4) b (Inequação produto-quociente)
5) b (Progressões)
6) e (Determinantes)
7) e (Razões e proporções)
8) e (Geometria analítica – circunferência)
9) c (Limite e continuidade)
10) c (Números complexos)
11) d (Polinômios)
12) b (Geometria analítica – circunferência)
13) a (Trigonometria no triângulo retângulo)
14) a (Função quadrática)
15) a (Geometria espacial – pirâmide e esfera)
16) c (Geometria espacial – cone e cilindro)
17) d (Equação polinomial)
18) e (Produtos notáveis e fatoração)
19) c (Geometria espacial – prisma)
20) e (Desigualdades)

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2009/2010

1) d (Conjuntos)
2) b (Geometria analítica – circunferência)
3) b (Equações trigonométricas)
4) e (Redução ao 1º quadrante)
5) e (Geometria plana – áreas)
6) b (Função)
7) d (Determinantes)
8) a (Números complexos – lugar geométrico)
9) d (Equação irracional)
10) e (Logaritmo)
11) a (Geometria analítica – reta)
12) e (Geometria espacial – tetraedro)
13) c (Geometria plana – relações métricas nos triângulos)
14) c (Geometria plana – relações métricas no triângulo retângulo)
15) c (Inequação produto – quociente)
16) d (Geometria plana – relações métricas nos triângulos e áreas)
17) d (Limites)
18) c (Progressões)
19) d (Conjuntos)
20) a (Geometria espacial – prisma e esfera)

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM 2008/2009

1) c (Operações com números naturais)
2) c (Função quadrática)
3) d (Logaritmo)
4) b (Trigonometria no triângulo retângulo)
5) a (Geometria espacial – cubo)
6) d (Função exponencial e função trigonométrica)
7) c (Função composta)
8) e (Polinômios – teorema de Bolzano)
9) b (Sistemas lineares)
10) e (Ângulos na circunferência e trigonometria)
11) b (Progressões)
12) c (Geometria analítica – circunferência)
13) c (Progressões)
14) b (Geometria analítica – reta)
15) e (Números complexos)
16) c (Determinantes)
17) c (Função logaritmo)
18) e (Progressões)
19) d (Geometria espacial – volume)
20) b (Polinômios)

QUADRO RESUMO DAS QUESTÕES DE 2009 A 2016

	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	TOTAL	PERCENTUAL
Conjuntos		2		1		1			4	2,5%
Conjuntos numéricos	1		1						2	1,3%
Desigualdades			1						1	0,6%
Razões, proporções e regra de três			1		1				2	1,3%
Operações com mercadorias				1	1				2	1,3%
Potenciação e radiciação						1	1		2	1,3%
Produtos notáveis e fatoração			1						1	0,6%
Equação irracional		1							1	0,6%
Progressões	3	1	2	3	1	2	2	3	17	10,6%
Trigonometria	1	2	1		4	1		1	10	6,3%
Função trigonométrica direta e inversa				1					1	0,6%
Números complexos	1	1	1	1	1	1	1	2	9	5,6%
Polinômios	2		2	2	1	1	1	3	12	7,5%
Inequação produto-quociente		1	1	1					3	1,9%
Função	1	1	1	1		2	1		7	4,4%
Equação do 2º grau			1	1					2	1,3%
Função quadrática	1			1			1	1	4	2,5%
Função exponencial	1				1	1		1	4	2,5%
Logaritmo	2	1		1					4	2,5%
Função modular				1				1	2	1,3%
Matrizes e determinantes	1	1	1	1		1	2		7	4,4%
Sistemas lineares	1				1				2	1,3%
Análise combinatória					1		1	1	3	1,9%
Probabilidade						1	1	1	3	1,9%
Noções de estatística - médias				1					1	0,6%
Limite		1	1	1	1	2	1	1	8	5,0%
Derivada					1	1	1		3	1,9%
Integral					2	1	2	1	6	3,8%
Geometria plana - triângulos		2				1			3	1,9%
Geometria plana - circunferência	1							1	2	1,3%
Geometria plana - áreas		2				1			3	1,9%
Vetores					1				1	0,6%
Geometria analítica - reta	1	1			1		2	1	6	3,8%
Geometria analítica - circunferência	1	1	2	1				1	6	3,8%
Geometria analítica no espaço						1	1		2	1,3%
Geometria espacial	2	2	3	1	2	1	2	1	14	8,8%
TOTAL POR PROVA	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**160**	**100%**

CAPÍTULO 3
ENUNCIADOS E RESOLUÇÕES

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2015/2016

1) Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a,b,c). Qual é a probabilidade de que b seja sucessor de a e que c seja sucessor de b OU que a, b e c sejam primos?

a) $\frac{4}{216}$

b) $\frac{27}{216}$

c) $\frac{108}{216}$

d) $\frac{31}{216}$

e) $\frac{10}{216}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
No primeiro caso a sequência de números deve ter a forma $(a,a+1,a+2)$. Os casos favoráveis são $(1,2,3)$, $(2,3,4)$, $(3,4,5)$ e $(4,5,6)$, ou seja, 4 casos.
No segundo caso, os valores possíveis para a, b e c são 2, 3 e 5. O número de casos favoráveis é $3!=6$.
O número de elementos do espaço amostral é $\#(\Omega)=6^3=216$ e o total de casos favoráveis é $\#(A)=4+6=10$ (observe que os dois conjuntos de casos favoráveis são disjuntos).
Portanto, a probabilidade pedida é $P=\frac{\#(A)}{\#(\Omega)}=\frac{10}{216}$.

2) O valor da integral $\int\left[\sqrt{2}\cdot \text{tg}^3(2x)\cdot\sec(2x)\right]^2 dx$, sendo c uma constante, é

a) $\sec^2(2x)+\text{tg}^2(2x)+c$

b) $\frac{\sec^2(2x)+\text{tg}^2(2x)+c}{\text{tg}(2x)}$

c) $\text{arctg}(\ln x)+c$

d) $\frac{\text{tg}^7(2x)}{7}+c$

e) $\sqrt{\text{tg}(2x)}+\text{sen}(2x)+c$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
$\text{tg}(2x) = u \Rightarrow du = \sec^2(2x) \cdot 2dx$

$$\int\left[\sqrt{2} \cdot \text{tg}^3(2x) \cdot \sec(2x)\right]^2 dx = \int \text{tg}^6(2x) \cdot 2\sec^2(2x)dx = \int u^6 du = \frac{u^7}{7} + c = \frac{\text{tg}^7(2x)}{7} + c$$

3) De acordo com conceitos administrativos, o lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática $L = R - C$, onde L é o lucro, C o custo da produção e R a receita do produto. Uma indústria produziu x peças e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(x) = x^2 - 500x + 100$ e a receita representada por $R(x) = 2000x - x^2$. Com base nessas informações, determine o número de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo.
a) 625
b) 781150
c) 1000
d) 250
e) 375

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O lucro quando são produzidas x peças é dado por
$L(x) = R(x) - C(x) = (2000x - x^2) - (x^2 - 500x + 100) = -2x^2 + 2500x - 100$.
Como essa é uma função quadrática de coeficiente líder negativo, então ela possui ponto de máximo que ocorre em $x_V = \frac{-2500}{2 \cdot (-2)} = 625$.
Portanto, devem ser produzidas 625 peças.

4) O valor de $\lim_{t \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}$ é:
a) 1
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 2

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O limite é da forma $\frac{0}{0}$, então, aplicando o teorema de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{2-\sqrt{4-t}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(4-t)^{-1/2}\cdot(-1)}{1}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4-t}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{4}.$$

5) A solução do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z+w=7 \\ xy+xz+xw+yz+yw+zw=4 \\ xyz+xyw+xzw+yzw=6 \\ xyzw=1 \end{cases}$$

pode ser representada pelas raízes do polinômio:

a) x^3+6x^2+4x+7
b) x^3-6x^2+4x-7
c) $2x^4-14x^3+8x^2-12x+2$
d) $7x^4-4x^3+6x^2+x$
e) $x^4+7x^3+4x^2+6x$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja $P(x)=a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$ o polinômio de 4º grau (que possui 4 raízes), cujas raízes são x, y, z e w.
Pelas relações de Girard (relações entre coeficientes e raízes), temos:

$$\sigma_1=\frac{-a_1}{a_0}=x+y+z+w=7 \Leftrightarrow a_1=-7a_0$$

$$\sigma_2=\frac{a_2}{a_0}=xy+xz+xw+yz+yw+zw=4 \Leftrightarrow a_2=4a_0$$

$$\sigma_3=\frac{-a_3}{a_0}=xyz+xyw+xzw+yzw=6 \Leftrightarrow a_3=-6a_0$$

$$\sigma_4=\frac{a_4}{a_0}=xyzw=1 \Leftrightarrow a_4=a_0$$

Sendo assim, o polinômio é dado por $P(x)=a_0x^4-7a_0x^3+4a_0x^2-6a_0x+a_0$.
Fazendo $a_0=2$, temos $P(x)=2x^4-14x^3+8x^2-12x+2$.

6) Sabendo que $\frac{5}{2}$ é uma raiz do polinômio $P(x)=2x^3-3x^2-9x+10$, a soma das outras raízes é igual a:

a) -2
b) 0
c) 10
d) 1
e) -1

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Sejam $r_1 = \frac{5}{2}$, r_2 e r_3 as três raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$, então, pelas relações de Girard, a soma dessas raízes é $\sigma_1 = r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$.

$r_1 = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} + r_2 + r_3 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow r_2 + r_2 = -1$

Portanto, a soma das outras raízes é -1.

7) Seja o número complexo $z = -1 - \sqrt{3}i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de z^8 é:

a) $z = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $z = 256\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z = 256\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{3}\right)$

d) $z = 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z = 256(\cos 2\pi + i\,\mathrm{sen}\, 2\pi)$

RESPOSTA: d

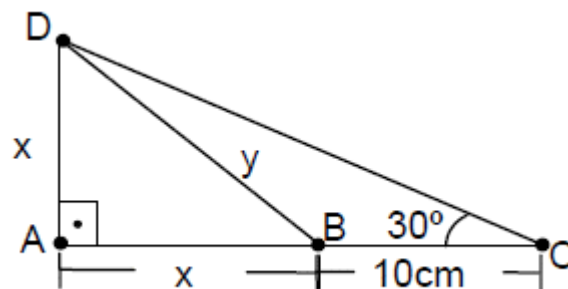
RESOLUÇÃO:

$z = -1 - \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

Pela 1ª fórmula de De Moivre, temos:

$z^8 = 2^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(8\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 256\left(\cos\frac{32\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{32\pi}{3}\right) = 256\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

Note que $\frac{32\pi}{3} = \frac{30\pi + 2\pi}{3} = 5\cdot(2\pi) + \frac{2\pi}{3}$.

8) Determine o perímetro do triângulo ABD, em cm, representado na figura abaixo:

a) $5\sqrt{3}+5$
b) $5\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$
c) $20+4\sqrt{5}$
d) 45
e) 50

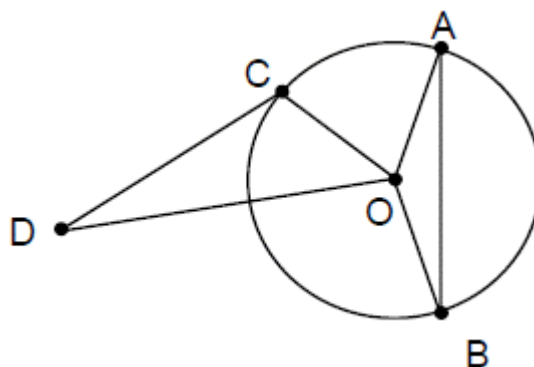
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
No triângulo retângulo ACD, temos:

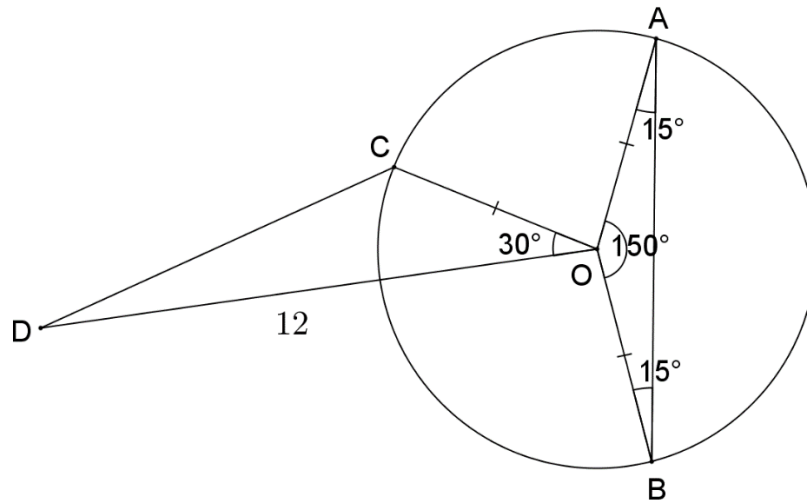
$$\operatorname{tg} 30° = \frac{x}{x+10} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x\left(\sqrt{3}-1\right) = 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 5\left(\sqrt{3}+1\right).$$

No triângulo retângulo ABD, temos: $y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow y = x\sqrt{2}$.

Logo, o perímetro do triângulo ABD é $2p = 2x + y = 2x + x\sqrt{2} = 5\left(2+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$.

9) Determine o comprimento do menor arco AB na circunferência de centro O, representada na figura a seguir, sabendo que o segmento OD mede 12 cm, os ângulos $C\hat{O}D = 30°$ e $O\hat{A}B = 15°$ e que a área do triângulo CDO é igual a $18\,\text{cm}^2$.

a) 5π cm
b) 12 cm
c) 5 cm
d) 12π cm
e) 10π cm

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Como O é o centro da circunferência, então $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ (raios).

O triângulo OAB é isósceles, pois $\overline{OA}=\overline{OB}$, então $O\hat{B}A=O\hat{A}B=15°$ e $A\hat{O}B=180°-2\cdot 15°=150°$.

$S_{COD}=\frac{OC\cdot OD}{2}\text{sen}\,30°=\frac{OC\cdot 12}{2}\cdot\frac{1}{2}=18\Leftrightarrow OC=6$

Portanto, o menor arco AB é um arco de 150º em uma circunferência de raio 6 cm e seu comprimento é $2\pi\cdot 6\cdot\frac{150°}{360°}=5\pi\text{ cm}$.

10) Dados os pontos $A(-2,5)$, $B(1,1)$ e $C(-1,-1)$, o valor da altura do triângulo ABC em relação à base AC é igual a:

a) $\sqrt{37}$

b) 5

c) $\sqrt{8}$

d) $\frac{14\sqrt{37}}{37}$

e) 7

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

A área do triângulo ABC é dada por $S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|-1-5-2-5-2+1|=\frac{1}{2}|-14|=7$.

O lado AC mede $AC=\sqrt{(-1-(-2))^2+(-1-5)^2}=\sqrt{37}$.

Sendo h a altura relativa ao lado AC e considerando a área do triângulo ABC, temos $S=\frac{AC\cdot h}{2}\Leftrightarrow 7=\frac{\sqrt{37}\cdot h}{2}\Leftrightarrow h=\frac{14\sqrt{37}}{37}$.

11) Numa progressão geométrica crescente, o 3º termo é igual à soma do triplo do 1º termo com o dobro do 2º termo. Sabendo que a soma desses três termos é igual a 26, determine o valor do 2º termo.
a) 6
b) 2
c) 3
d) 1
e) $\frac{26}{7}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja a $PG: a_1, a_2, a_3$ de razão q. Para que a PG seja crescente, devemos ter $a_1 > 0$ e $q > 1$.

$$a_3 = 3a_1 + 2a_2 \Rightarrow a_1q^2 = 3a_1 + 2a_1q \Leftrightarrow q^2 - 2q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = -1 \vee q = 3$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 26 \Rightarrow a_1(1 + q + q^2) = 26 \Leftrightarrow a_1 \cdot (1 + 3 + 3^2) = 26 \Leftrightarrow a_1 = 2$$

Logo, o segundo termo da PG é $a_2 = a_1 \cdot q = 2 \cdot 3 = 6$.

12) Determine a imagem da função f, definida por $f(x) = ||x+2| - |x-2||$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais.
a) $Im(f) = \mathbb{R}$
b) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
c) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$
d) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$
e) $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$x < -2 \Rightarrow f(x) = |(-x-2) - (-x+2)| = |-4| = 4 \Rightarrow Im_1 = \{4\}$$

$$-2 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = |(x+2) - (-x+2)| = |2x| = 2|x| \Rightarrow Im_2 = [0, 4[$$

$$x \geq 2 \Rightarrow f(x) = |(x+2) - (x-2)| = |4| = 4 \Rightarrow Im_3 = \{4\}$$

$$Im(f) = Im_1 \cup Im_2 \cup Im_3 = \{4\} \cup [0, 4[\cup \{4\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$$

13) Quanto à posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ como
a) secantes.
b) tangentes internas.
c) tangentes externas.
d) externas.
e) internas.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
A circunferência $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ tem centro $O_1(2,3)$ e raio $R_1=3$.
A circunferência $x^2+y^2-8x+15=0 \Leftrightarrow x^2-8x+16+y^2=16-15 \Leftrightarrow (x-4)^2+y^2=1$ tem centro $O_2(4,0)$ e raio $R_2=1$.
A distância entre seus centros é $O_1O_2=\sqrt{(2-4)^2+(3-0)^2}=\sqrt{13}$.
Como $3-1<\sqrt{13}<3+1 \Leftrightarrow R_1-R_2<O_1O_2<R_1+R_2$, então as circunferências são secantes.
Note que, quando as circunferências são secantes, R_1, R_2 e O_1O_2 formam um triângulo e, portanto, devem satisfazer a desigualdade triangular.

14) A quantidade de anagramas da palavra MERCANTE que não possui vogais juntas é
a) 40320
b) 38160
c) 37920
d) 7200
e) 3600

RESPOSTA: d

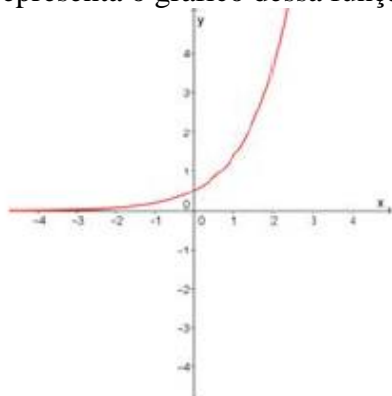
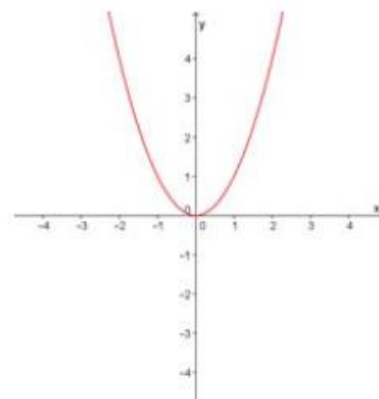
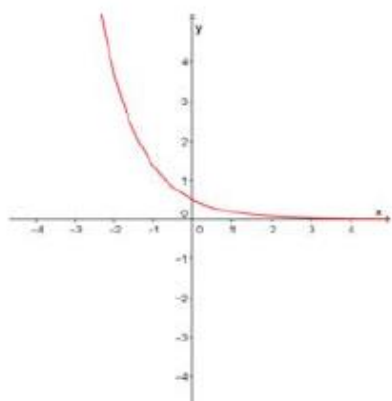
RESOLUÇÃO:
Seja um anagramа da forma $\underset{x_1}{_}\ V\ \underset{x_2}{_}\ V\ \underset{x_3}{_}\ V\ \underset{x_4}{_}$, onde x_i, i = 1, 2, 3, 4, representa a quantidade de consoantes em cada um dos intervalos.
A palavra MERCANTE possui 5 consoantes, então $x_1+x_2+x_3+x_4=5$.
Como o anagrama não pode possuir vogais juntas, então $x_2>0$ e $x_3>0$.
A resolução da equação linear básica garante que cada variável é maior ou igual a zero. Para satisfazermos a condição $x_2>0$ e $x_3>0$, devemos fazer o seguinte:

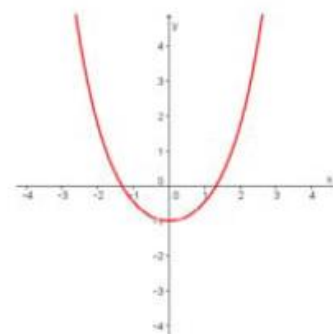
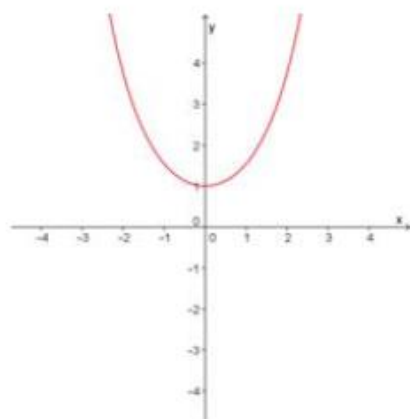
$$x_1+x_2+x_3+x_4=5 \Leftrightarrow x_1+\underbrace{x_2-1}_{y_2}+\underbrace{x_3-1}_{y_3}+x_4=3 \Leftrightarrow x_1+y_2+y_3+x_4=3$$

Nessa última equação, se $y_2=x_2-1\ge 0 \Rightarrow x_2\ge 1$ e $y_3=x_3-1\ge 0 \Rightarrow x_3\ge 1$.
O número de soluções da equação linear é igual ao número de maneiras de ordenar 3 tracinhos e 3 bolinhas, ou seja, $P_6^{3,3}=\frac{6!}{3!3!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{6}=20$.
Finalmente, para obter o total de anagramas devemos multiplicar o valor obtido acima pela permutação das 5 consoantes (distintas) e das 3 vogais (2 iguais e 1 diferente). Assim, temos:

$$20\cdot P_5\cdot P_3^{2,1}=20\cdot 5!\cdot\frac{3!}{2!1!}=20\cdot 120\cdot 3=7200.$$

15) Um aluno precisa construir o gráfico da função real f, definida por $f(x)=\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}$. Ele percebeu que a função possui a seguinte característica: $f(-x)=\frac{e^{-x}}{2}+\frac{e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^x}{2}+\frac{e^{-x}}{2}=f(x)$. Assinale a alternativa que representa o gráfico dessa função.

(a)

(d)

(b)

(e)

(c)

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A característica citada no enunciado, $f(-x)=f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, indica que a função f é par e que seu gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy. Isso elimina as alternativas a) e b).
Basta agora encontrar o valor de $f(0)$ para descobrirmos a alternativa correta.

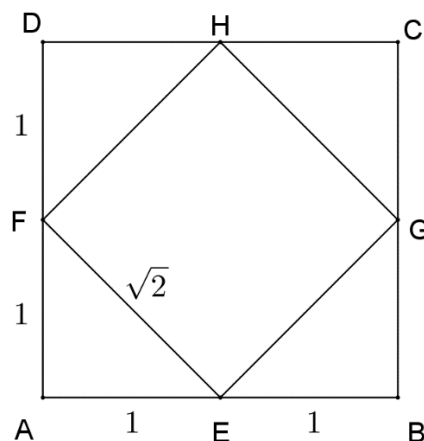
$$f(0)=\frac{e^0}{2}+\frac{e^{-0}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Logo, o gráfico correto é o da alternativa c).

16) Seja um quadrado de lado 2. Unindo os pontos médio de cada lado, temos um segundo quadrado. Unindo os pontos médios do segundo quadrado, temos um terceiro quadrado, e assim sucessivamente. O produto das áreas dos dez primeiros quadrados é

a) $2^{-\frac{9}{2}}$
b) $2^{-\frac{25}{2}}$
c) $2^{-\frac{45}{2}}$
d) 2^{-45}
e) 2^{-25}

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Os quadrados formados como descrito têm razão de semelhança $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Logo, a razão entre as suas áreas é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Sendo assim, as áreas dos dez primeiros quadrados formam uma progressão geométrica de 1º termo $a_1=2^2=4$ e razão $q=\frac{1}{2}$.

Portanto, o produto das áreas dos dez primeiros quadrados é

$$P_{10}=\left(a_1\cdot a_{10}\right)^{\frac{10}{2}}=\left(4\cdot 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)^5=\left(2^4\cdot\frac{1}{2^9}\right)^5=\left(2^{-5}\right)^5=2^{-25}.$$

17) O número complexo, $z=|z|\cdot(\cos\theta+i\cdot\operatorname{sen}\theta)$, sendo i a unidade imaginária e $0\le\theta\le 2\pi$, que satisfaz a inequação $|z+3i|\le 2$ e que possui o menor argumento θ, é

a) $z = -\frac{5}{3} - \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

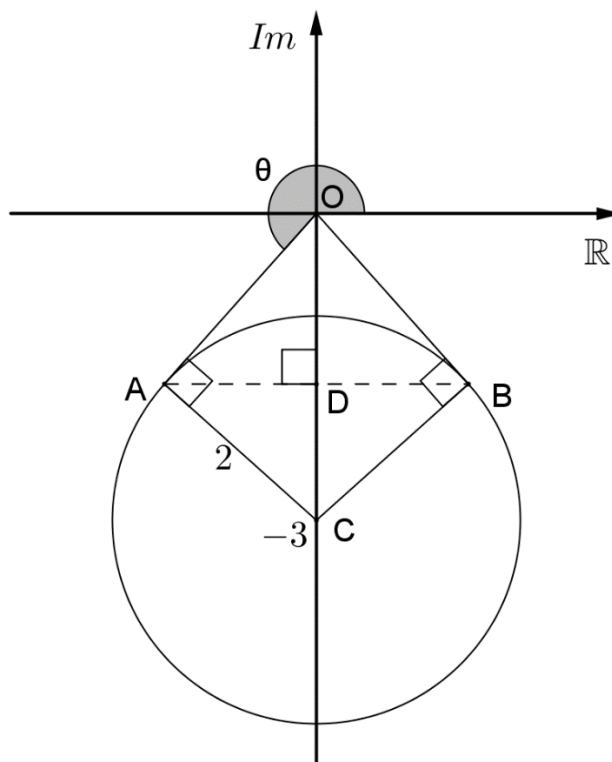
b) $z = -\frac{5}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3}i$

c) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} - \frac{5}{3}i$

d) $z = -\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{5}{3}i$

e) $z = -2\sqrt{5} + 5i$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A inequação $|z+3i| \leq 2 \Leftrightarrow |z-(-3i)| \leq 2$ representa os números complexos cuja distância ao complexo $-3i$ é menor ou igual a 2. Isso equivale ao círculo de centro em $(0,-3)$ e raio 2 no plano de Argand-Gauss, conforme figura abaixo.

Assim, o complexo de menor argumento é o correspondente ao ponto A e o de maior argumento é o correspondente ao ponto B.
Vamos identificar então o número complexo que é afixo do ponto A.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAC, temos: $AO^2 + 2^2 = 3^3 \Leftrightarrow AO = \sqrt{5}.$

Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos: $3 \cdot AD = 2 \cdot \sqrt{5} \Leftrightarrow AD = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ e $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 3 \cdot OD \Leftrightarrow OD = \frac{5}{3}$.

Portanto, as coordenadas do ponto A são $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3},-\frac{5}{3}\right)$ e o número complexo correspondente é $z=-\frac{2\sqrt{5}}{3}-\frac{5}{3}i$.

18) Seja o polinômio $p(x)=x^6-26x^4-32x^3-147x^2-96x-180$. A respeito das raízes da equação $p(x)=0$, podemos afirmar que
a) todas as raízes são reais.
b) somente duas raízes são reais, sendo elas distintas.
c) somente duas raízes são reais, sendo elas iguais.
d) somente quatro raízes são reais, sendo todas elas distintas.
e) nenhuma raiz é real.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Como de polinômio é de grau par, ele pode ter 0, 2, 4 ou 6 raízes reais.
Vamos testar as possíveis raízes racionais que são os divisores de 180, ou seja,
$D(180)=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5,\pm6,\pm9,\pm10,\pm12,\pm15,\pm18,\pm20,\pm30,\pm36,\pm45,\pm60,\pm90,\pm180\}$.

$p(x)=x^6-26x^4-32x^3-147x^2-96x-180$

$p(1)=1^6-26\cdot1^4-32\cdot1^3-147\cdot1^2-96\cdot1-180=-480$

$p(-1)=(-1)^6-26\cdot(-1)^4-32\cdot(-1)^3-147\cdot(-1)^2-96\cdot(-1)-180=-224$

$p(2)=2^6-26\cdot2^4-32\cdot2^3-147\cdot2^2-96\cdot2-180=-1568$

$p(-2)=(-2)^6-26\cdot(-2)^4-32\cdot(-2)^3-147\cdot(-2)^2-96\cdot(-2)-180=-672$

$p(3)=3^6-26\cdot3^4-32\cdot3^3-147\cdot3^2-96\cdot3-180=-4032$

$p(-3)=(-3)^6-26\cdot(-3)^4-32\cdot(-3)^3-147\cdot(-3)^2-96\cdot(-3)-180=-1728$

$p(4)=4^6-26\cdot4^4-32\cdot4^3-147\cdot4^2-96\cdot4-180=-7524$

$p(-4)=(-4)^6-26\cdot(-4)^4-32\cdot(-4)^3-147\cdot(-4)^2-96\cdot(-4)-180=-2660$

$p(5)=5^6-26\cdot5^4-32\cdot5^3-147\cdot5^2-96\cdot5-180=-8960$

$p(-5)=(-5)^6-26\cdot(-5)^4-32\cdot(-5)^3-147\cdot(-5)^2-96\cdot(-5)-180=0$ (raiz)

Como $p(x)$ é de grau par, devemos ter outras raízes reais. Vamos testar mais alguns candidatos a raízes.

$p(6)=6^6-26\cdot6^4-32\cdot6^3-147\cdot6^2-96\cdot6-180=0$ (raiz)

Vamos aplicar o algoritmo de Briott-Ruffini para essas duas raízes:

	1	0	–26	–32	–147	–96	–180
–5	1	–5	–1	–27	–12	–36	0
6	1	1	5	3	6	0	

$\Rightarrow p(x)=(x+5)(x-6)(x^4+x^3+5x^2+3x+6)$

Vamos estudar o polinômio $q(x)=x^4+x^3+5x^2+3x+6$.

$$q(x) = x^4 + x^3 + 5x^2 + 3x + 6 = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 3x + 6 =$$
$$= x^2(x^2 + x + 2) + 3(x^2 + x + 2) = (x^2 + 3)(x^2 + x + 2)$$

Assim, temos: $p(x) = (x+5)(x-6)(x^2+3)(x^2+x+2)$

Os polinômios $x^2 + 3$ e $x^2 + x + 2$ $(\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0)$ não possuem raízes reais, então o polinômio $p(x)$ possui duas raízes reais, -5 e 6, e mais quatro raízes complexas.
Dessa forma, o polinômio possui somente duas raízes reais, sendo elas distintas.

19) Um garrafão contém 3 litros de vinho. Retira-se um litro de vinho do garrafão e acrescenta-se um litro de água, obtendo-se uma mistura homogênea. Retira-se, a seguir, um litro da mistura e acrescenta-se um litro de água, e assim por diante. A quantidade de vinho, em litros, que resta no garrafão, após 5 dessas operações, é aproximadamente igual a
a) 0,396
b) 0,521
c) 0,676
d) 0,693
e) 0,724

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Após a primeira operação, no garrafão tem-se uma mistura com 2 litros de vinho e 1 litro de água.
Na segunda operação, retira-se 1 litro da mistura, o que corresponde a $\frac{1}{3}$ dessa mistura. Assim, retira-se $\frac{1}{3}$ do vinho e $\frac{1}{3}$ da água.

A análise dos primeiros passos permite concluir que a cada operação retira-se $\frac{1}{3}$ do vinho e a quantidade de vinho restante é $\frac{2}{3}$ da etapa anterior. Portanto, a quantidade de vinho é uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $q = \frac{2}{3}$. A quantidade de vinho, após cinco dessas operações, é $a_6 = a_1 \cdot q^5 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{81}\,\ell \simeq 0,396\,\ell$.

20) Seja uma esfera de raio R e um cubo de aresta A, ambos com a mesma área de superfície. A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é igual a
a) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$
b) $\sqrt{\frac{\pi}{12}}$
c) $\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$

d) $\sqrt{\frac{\pi}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{\pi}{6}}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A área de uma esfera de raio R é $S_{esfera} = 4\pi R^2$ e a área do cubo de aresta A $S_{cubo} = 6A^2$.

Como ambos têm a mesma área, então $4\pi R^2 = 6A^2 \Leftrightarrow \frac{A^2}{R^2} = \frac{2\pi}{3}$.

A razão entre o volume do cubo e o volume da esfera é

$$\frac{V_{cubo}}{V_{esfera}} = \frac{A^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{A^2}{R^2} \cdot \frac{A}{R} = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}}.$$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2014/2015

1) O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais a_1, a_2 e a_3 formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, com primeiro termo 2 e representam as medidas dos lados de um triângulo, é

a) $\left]-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

b) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

c) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right[$.

d) $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right[$.

e) $\left]1, 1+\sqrt{5}\right[$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Os termos da progressão geométrica são $a_1 = 2$, $a_2 = 2q$ e $a_3 = 2q^2$.
Como $q > 1$, a progressão geométrica é crescente.
Os termos da P.G. representam as medidas dos lados de um triângulo, então devem satisfazer a desigualdade triangular. Assim, devemos ter:

$$a_3 < a_1 + a_2 \Leftrightarrow 2q^2 < 2 + 2q \Leftrightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Fazendo a interseção da desigualdade acima com a condição $q > 1$ estabelecida no enunciado, obtemos $\left]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

2) Sabendo-se que $a = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$, pode-se afirmar que o ângulo θ, em radianos, tal que $\operatorname{tg}\theta = \ln a - 1$, pode ser

a) $-\frac{\pi}{4}$

b) $-\frac{\pi}{2}$

c) $\frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{2}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO: (O enunciado dessa questão foi alterado, pois a mesma estava incorreta da forma como foi proposta.)
1ª SOLUÇÃO:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x}}}=e^2$$

$$\operatorname{tg}\theta=\ln a-1=\ln e^2-1=2-1=1\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Para $k=0$, temos $\theta=\frac{\pi}{4}$.

2ª SOLUÇÃO DO LIMITE:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{(x-1)+1}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{(x-1)}\cdot\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{(x-1)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1=$$

$$=\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^2\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^1=e^2\cdot1=e^2$$

3ª SOLUÇÃO DO LIMITE:

$$\ln a=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}}\overset{(*)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}=\frac{\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot1}{(x-1)^2}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-2}{(x+1)(x-1)}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{1}{x^2}}=2$$

$$\Rightarrow\ln a=2\Leftrightarrow a=e^2$$

(*) Aplicou-se o teorema de L'Hôpital na indeterminação $\frac{0}{0}$.

4ª SOLUÇÃO DO LIMITE:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}$$

$$\ln a=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x-1}\right)\cdot\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)=2\cdot\ln e=2$$

$\Rightarrow \ln a=2\Leftrightarrow a=e^2$

5ª SOLUÇÃO DO LIMITE:

$$a=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=$$

$$=\frac{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(-x)}\right)^{(-x)}\right)^{-1}}=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$$

3) Considere o número complexo $z_1\neq 1$, tal que z_1 seja solução da equação $z^6=1$, com menor argumento positivo. A solução z_2 da mesma equação, cujo argumento é o triplo do argumento de z_1, é igual a

a) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) -1

d) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Pela segunda fórmula de De Moivre, temos:

$$z^6=1=1\cdot\operatorname{cis}0\Leftrightarrow z=\sqrt[6]{1}\cdot\operatorname{cis}\frac{0+2k\pi}{6}=1\cdot\operatorname{cis}\frac{k\pi}{3},\ k=0,1,2,\ldots,5$$

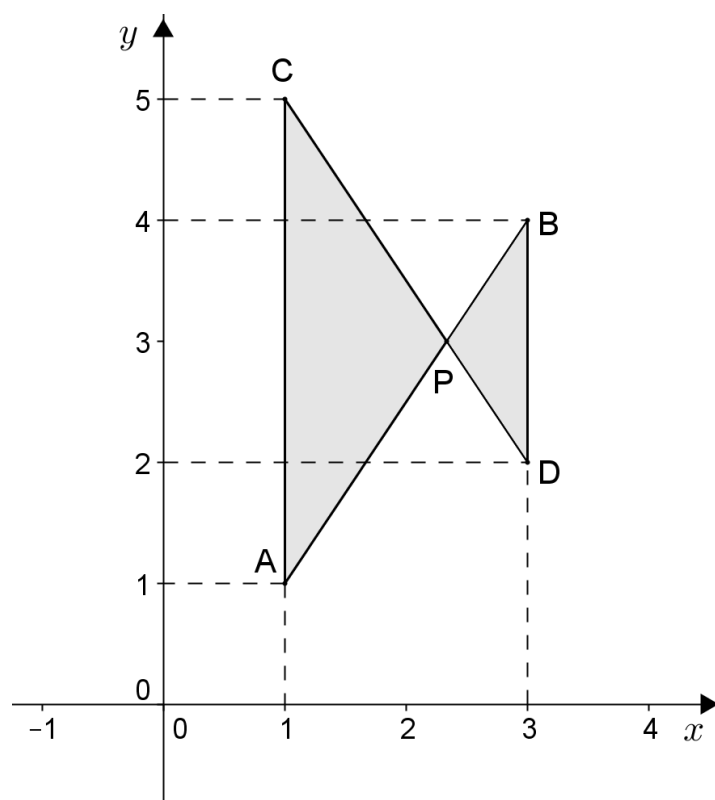
Assim, as soluções da equação são: $1\cdot\text{cis}\,0=1$, $1\cdot\text{cis}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1\cdot\text{cis}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $1\cdot\text{cis}\frac{3\pi}{3}=-1$, $1\cdot\text{cis}\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $1\cdot\text{cis}\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como $z_1\neq 1$ é a solução de menor argumento positivo, então $z_1=1\text{cis}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como z_2 é solução dessa mesma equação e possui argumento igual do triplo do argumento de z_1, então o argumento de z_2 é $3\cdot\frac{\pi}{3}=\pi$ e $z_2=1\cdot\text{cis}\,\pi=-1$.

4) Considerando os pontos $A(1,1)$, $B(3,4)$, $C(1,5)$, $D(3,2)$ e P como a interseção dos segmentos AB e CD, a expressão $3a+6b$, onde a é a área do triângulo APC e b é a área do triângulo BPD, é igual a
a) 24
b) 20
c) 10
d) 16
e) 12

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

A reta que passa por $A(1,1)$ e $B(3,4)$ tem equação dada por

$$\frac{y-1}{x-1}=\frac{4-1}{3-1}\Leftrightarrow y-1=\frac{3}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}.$$

A reta que passa por $C(1,5)$ e $D(3,2)$ tem equação dada por
$\frac{y-5}{x-1}=\frac{5-2}{1-3} \Leftrightarrow y-5=-\frac{3}{2}(x-1) \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$.

O ponto P é a interseção das retas $AB: y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$ e $CD: y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}$. Assim, suas coordenadas são $\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{2} \Leftrightarrow 3x=7 \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}$ e $y=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}-\frac{1}{2}=3$. Portanto, $P\left(\frac{7}{3},3\right)$.

A área do triângulo APC é $a=S_{APC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 7/3 & 1\\ 1 & 3 & 5\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{16}{3}\right|=\frac{8}{3}$ e a área do triângulo BPD é

$b=S_{BPD}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 7/3 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{4}{3}\right|=\frac{2}{3}$. Portanto, $3a+6b=3\cdot\frac{8}{3}+6\cdot\frac{2}{3}=12$.

5) Uma turma de alunos do 1° ano da EFOMM tem aulas às segundas, quartas e sextas, de 8h40 às 10h20 e de 10h30 às 12h. As matérias são Arquitetura Naval, Inglês e Cálculo, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?
a) 9
b) 18
c) 36
d) 48
e) 54

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, vamos contar o número de maneiras de marcar as aulas de Arquitetura Naval. Temos que escolher 2 dentre os 3 dias e, em cada dia, temos 2 possibilidades de horário. Assim, o número de maneiras de marcar essas aulas é $\binom{3}{2}\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2\cdot 2=12$.
Vamos agora contar o número de maneiras de marcar as aulas de Inglês. Uma das aulas deve ocorrer em um dos 2 dias já ocupados pela aula de Arquitetura Naval e a outra em um dos 2 horários no dia que está livre. Assim, o número de maneiras de marcar essas aulas é $2\cdot 2=4$.
As aulas de Cálculo ocorrerão necessariamente nos dois horários restantes, ou seja, há uma única maneira de marcá-las.
Pelo princípio multiplicativo, o número de modos que pode ser feito o horário é $12\cdot 4\cdot 1=48$.

6) Sejam as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Sabendo que f é bijetora e g é sobrejetora, considere as sentenças a seguir:
I - $g\circ f$ é injetora;
II - $f\circ g$ é bijetora;
III - $g\circ f$ é sobrejetora.
Assinalando com verdadeiro (V) ou falso (F) a cada sentença, obtém-se

a) V – V – V
b) V – V – F
c) F – V – F
d) F – F – V
e) V – F – V

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
I – FALSA
Contra-exemplo: Se $f(x) = x$ que é uma função bijetora, então $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x)$ que não é necessariamente injetora.
II – FALSA
Como não foi afirmado que g é injetora, então podemos supor que existam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, tais que $g(x_1) = g(x_2)$. Aplicando a função f nos dois lados dessa igualdade, temos $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, o que implica que a função $f \circ g$ não é injetora e, consequentemente, não é bijetora.
III − VERDADEIRA
Devemos provar que $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f)(x) = y$. Como g é sobrejetora, então $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $g(z) = y$. Como f é bijetora, então existe f^{-1} a função inversa de f. Assim, basta tomar $f(x) = z \Leftrightarrow x = f^{-1}(z)$. Dessa forma, temos $\forall y \in \mathbb{R}$, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $g(z) = y$ e $x = f^{-1}(z)$ tais que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(f^{-1}(z))) = g(z) = y$. Portanto, $g \circ f$ é sobrejetora.

7) Sabendo-se que $\det \begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = a$, calcule, em função de a, $\det \begin{pmatrix} 2e & 2\pi & \sqrt{8} & 24^{\frac{1}{3}} & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix}$.

a) $2a$
b) $-2a$
c) a
d) $-a$
e) $3a$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\det\begin{pmatrix} 2e & 2\pi & \sqrt{8} & 24^{\frac{1}{3}} & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2e & 2\pi & 2\sqrt{2} & 2\cdot 3^{\frac{1}{3}} & 2\cdot 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} \overset{(1)}{=} 2\cdot\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} =$$

$$\overset{(2)}{=} -2\cdot\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 16 \end{pmatrix} \overset{(3)}{=} -2\cdot\det\begin{pmatrix} e & \pi & \sqrt{2} & 3^{\frac{1}{3}} & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 5 & 12 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -2a$$

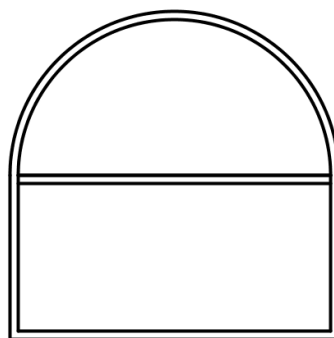
(1) Colocamos o 2 em evidência na primeira linha do determinante, o que implica que o determinante fica multiplicado por 2.

(2) Invertemos a segunda linha com a terceira, o que implica o que determinante fica multiplicado por -1.

(3) Substituímos a quinta linha pela diferença entre a quinta e a quarta linha, o que não altera o determinante (teorema de Jacobi).

8) Deseja-se construir uma janela que, possuindo a forma de um retângulo sob um semicírculo, conforme figura abaixo, permita o máximo de passagem de luz possível.
Sabe-se que: o vidro do retângulo será transparente; o vidro do semicírculo será colorido, transmitindo, por unidade de área, apenas metade da luz incidente em relação ao vidro transparente; o perímetro total da janela é fixo p.

Nessas condições, determine as medidas da parte retangular da janela, em função do perímetro p.

Obs.: Ignore a espessura do caixilho.

a) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{2(3\pi+8)}p$

b) $\frac{2}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{4(3\pi+8)}p$

c) $\frac{8}{3\pi+8}p$ e $\frac{\pi+4}{3\pi+8}p$

d) $\frac{6}{3\pi+8}p$ e $\frac{3(\pi+4)}{4(3\pi+8)}p$

e) $\frac{4}{3\pi+8}p$ e $\frac{8}{3\pi+8}p$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja $2r$ a base do retângulo, então a sua altura será dada por:

$$p = 2r + 2h + \pi r \Leftrightarrow h = \frac{p}{2} - r - \frac{\pi r}{2} = \frac{p}{2} - r\left(\frac{\pi+2}{2}\right).$$

Seja a incidência de luz igual k por unidade de área, então a luz transmitida pelo retângulo é $k\cdot(2r)\cdot\left[\frac{p}{2} - r\left(\frac{\pi+2}{2}\right)\right] = k\cdot r\cdot\left[p - r(\pi+2)\right]$ e a luz transmitida pelo semicírculo é $\frac{1}{2}\cdot k\cdot\frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{4}\cdot k.$

Assim, a passagem de luz total é $\left[\left(-2-\frac{3\pi}{4}\right)r^2 + pr\right]\cdot k = \left[-\left(\frac{8+3\pi}{4}\right)r^2 + pr\right]\cdot k$ que é uma função do 2° grau em r e assume seu valor máximo quando $r = \frac{-p}{2\cdot\left(\frac{-8-3\pi}{4}\right)} = \frac{2p}{8+3\pi}.$

Portanto, as medidas do retângulo são:

$$2r = \frac{4p}{8+3\pi} \text{ e } h = \frac{p}{2} - \left(\frac{\pi+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{2p}{3\pi+8}\right) = p\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi+2}{3\pi+8}\right) = \frac{\pi+4}{2(3\pi+8)}\cdot p.$$

Note que o valor de r foi obtido utilizando que uma função quadrática da forma $y = ax^2 + bx + c$ possui um vértice de coordenadas $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = \frac{-\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, e que esse vértice é um ponto de máximo, se $a < 0$, ou um ponto de mínimo, se $a > 0$.

9) Um juiz de futebol trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma outro face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, a probabilidade de a face voltada para o juiz ser vermelha será

a) $\frac{1}{6}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{2}{3}$.

d) $\frac{1}{2}$.

e) $\frac{3}{2}$.

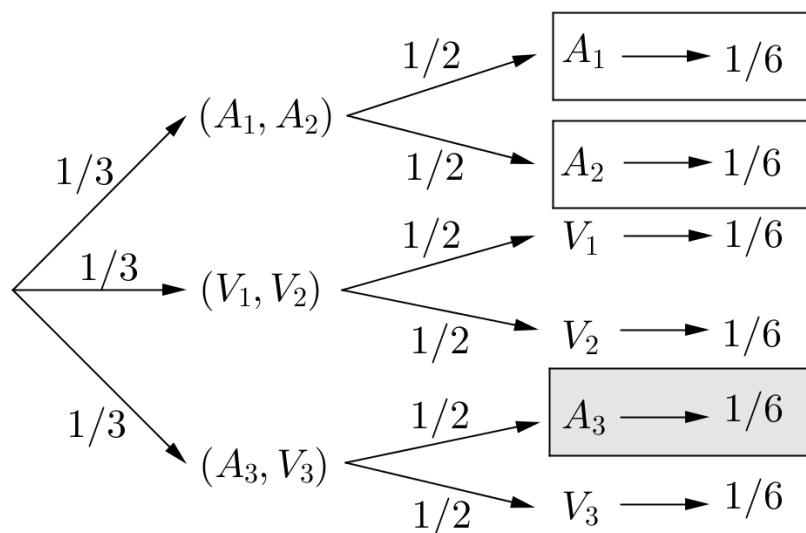
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Considere os cartões (A_1, A_2), (V_1, V_2) e (A_3, V_3) identificados pela cor de suas faces.

Vamos analisar o experimento no qual o juiz retira o cartão e mostra uma das faces para o jogador aleatoriamente. Se a face que o jogador vê é amarela, ou seja, A_1, A_2 ou A_3, então esse é o nosso espaço amostral. Assim, $n(\Omega) = 3$.

Para que a face voltada para o juiz seja vermelha, o jogador deve estar vendo a face A_3. Assim, há um único caso favorável e $n(A) = 1$.

Logo, a probabilidade pedida é $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{3}$.

Esse problema pode ser feito também com auxílio do diagrama de árvore a seguir, onde foi adotada a mesma nomenclatura para os cartões e suas faces.

Se a face que o jogador vê é amarela, então ele vê uma das três faces marcadas por retângulos no diagrama. Para que a face voltada para o juiz ser vermelha, então o jogador deve estar vendo a face A_3. Portanto, a probabilidade pedida é $P = \frac{P(A_3)}{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)} = \frac{1/6}{1/6 + 1/6 + 1/6} = \frac{1}{3}$.

10) Assinale a alternativa que apresenta equações paramétricas da reta r, sabendo-se que o ponto A, cujas coordenadas são $(2, -3, 4)$, pertence a r e que r é ortogonal às retas $r_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 3 \end{cases}$.

a) $r : \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{6} = 4 - z$

b) $r: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -3 + 5t \\ z = 4 \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} y = x - 5 \\ z = 6 - x \end{cases}$

d) $r: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$

e) $r: \begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -3 + 6t \\ z = 4 - t \end{cases}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Sejam $\vec{d}_1$, $\vec{d}_2$ e $\vec{d}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ os vetores diretores das retas $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ e $\vec{r}$, respectivamente.

$$r_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -3 \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_1 = (1, -1, 0)$$

$$r_2: \begin{cases} y = -x - 1 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow r_2: \begin{cases} x = t \\ y = -1 - x \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_2 = (1, -1, 0)$$

$$\vec{d}_1 = \vec{d}_2 \Rightarrow r_1 \parallel r_2$$

$$r \perp r_1 \wedge r \perp r_2 \Rightarrow \vec{d}_0 \cdot \vec{d}_1 = 0 \Rightarrow x_0 - y_0 = 0 \Rightarrow \vec{d}_0 = (a, a, b);\ a, b \in \mathbb{R}$$

$$(2, -3, 4) \in r \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 + at \\ y = -3 + at \\ z = 4 + bt \end{cases}$$

Fazendo, $a = 6$ e $b = -1$, temos a reta da alternativa e). Note que a reta da alternativa e) é a mesma da alternativa b), mas em b) é apresentada a equação simétrica da reta e em e) a equação paramétrica pedida.

11) Assinale a alternativa que apresenta o polinômio P de grau mínimo, com coeficientes reais, de modo que $P(i) = 2$ e $P(1+i) = 0$.

a) $\frac{1}{5}(2x^3 - 3x^2 - 2x + 2)$

b) $\frac{2}{5}(2x^3 - 3x^2 - 2x + 2)$

c) $\frac{2}{5}(2x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$

d) $\frac{1}{5}\left(2x^3-3x^2-2x+2\right)$

e) $\frac{2}{3}\left(x^3-x^2-2x+3\right)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO: **(As alternativas foram alteradas, pois não havia resposta correta)**
Inicialmente, lembremos que se um número complexo (não real) é raiz de multiplicidade m de um polinômio de coeficientes reais, então o seu conjugado também é raiz de multiplicidade m desse polinômio.
Se $P(x)$ possui coeficientes reais e $P(1+i)=0$, então $P(1-i)=0$.
Logo, $P(x)$ tem um fator $(x-1-i)(x-1+i)=x^2-2x+2$ e pode ser escrito como $P(x)=\left(x^2-2x+2\right)\cdot q(x)$.

$$P(i)=\left(i^2-2i+2\right)\cdot q(i)=2 \Leftrightarrow (1-2i)\cdot q(i)=2 \Leftrightarrow q(i)=\frac{2}{1-2i}=\frac{2(1+2i)}{1+4}=\frac{2}{5}(1+2i)$$

Para que $P(x)$ tenha coeficientes reais e grau mínimo, $q(x)$ deve possuir coeficientes reais e ser do primeiro grau.
Fazendo $q(x)=ax+b$, com $a,b\in\mathbb{R}$, temos:

$$q(i)=a\cdot i+b=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i \Leftrightarrow a=\frac{4}{5} \wedge b=\frac{2}{5} \Rightarrow q(x)=\frac{2}{5}(2x+1).$$

Portanto, $P(x)=\frac{2}{5}(2x+1)\left(x^2-2x+2\right)=\frac{2}{5}\left(2x^3-3x^2+2x+2\right)$.

12) Dada uma função $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sabe-se que:
i) $F'(x)=\operatorname{sen}(3x)\cos(5x)$, onde $F'(x)$ é a derivada da função F, em relação à variável independente x;
ii) $F(0)=0$.
O valor de $F\left(\frac{\pi}{16}\right)$ é

a) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

b) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$

c) $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

d) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}+\frac{3}{4}\right)$

e) $\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Aplicando a transformação de produto em soma, temos: $\operatorname{sen}(3x)\cos(5x)=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(8x)-\operatorname{sen}(2x)]$.

Vamos recordar a integral $\int \operatorname{sen}(kx)dx=-\frac{\cos(kx)}{k}+c$.

$$F(x)=\int F'(x)dx+c=\int\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(8x)-\operatorname{sen}(2x))dx+c=-\frac{\cos(8x)}{16}+\frac{\cos(2x)}{4}+c$$

$$F(0)=-\frac{\cos(8\cdot 0)}{16}+\frac{\cos(2\cdot 0)}{4}+c=0\Leftrightarrow c=-\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow F(x)=-\frac{\cos(8x)}{16}+\frac{\cos(2x)}{4}-\frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{16}\right)=-\frac{\cos\left(8\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{16}+\frac{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{16}\right)}{4}-\frac{3}{16}=-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{16}+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-\frac{3}{4}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1\Leftrightarrow\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

13) Os números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q. Nesse caso, é correto afirmar que a sequência $\log a_1, \log a_2, \ldots, \log a_n$ forma

a) uma progressão geométrica crescente, se $q>1$.
b) uma progressão aritmética crescente, se $q>1$.
c) uma progressão geométrica decrescente, se $0<q<1$.
d) uma progressão aritmética crescente, se $0<q<1$.
e) uma progressão aritmética crescente, desde que $q>0$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$PG:\ a_1, a_2, \ldots, a_n\Rightarrow\frac{a_{k+1}}{a_k}=q\Rightarrow\log\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)=\log q\Leftrightarrow\log a_{k+1}-\log a_k=\log q$$

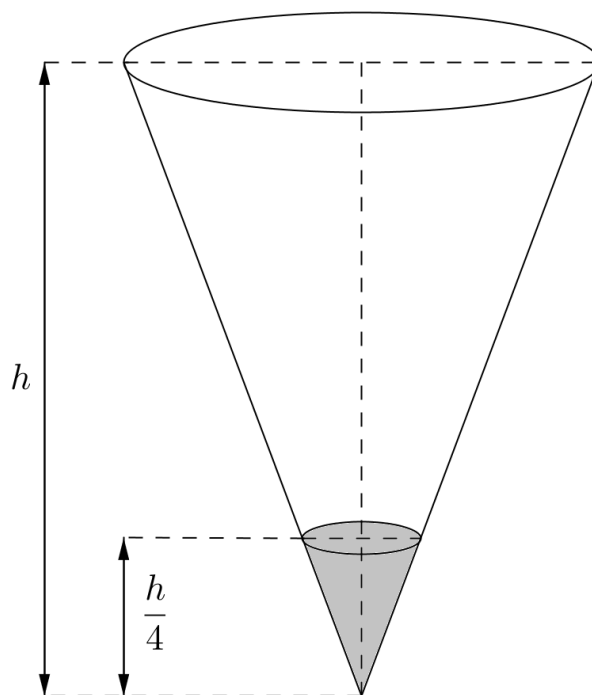
Portanto, a sequência $\log a_1, \log a_2, \ldots, \log a_n$ é uma progressão aritmética de razão $r=\log q$.
Se $0<q<1$, então $r=\log q<0$ e a PA é decrescente.
Se $q>1$, então $r=\log q>0$ e a PA é crescente.

14) Um tanque em forma de cone circular de altura h encontra-se com vértice para baixo e com eixo na vertical. Esse tanque, quando completamente cheio, comporta 6000 litros de água. O volume de água, quando o nível está a $\frac{1}{4}$ da altura, é igual a

a) 1500 litros.

b) 150 litros.
c) $93,75$ litros.
d) 30 litros.
e) 125 litros.

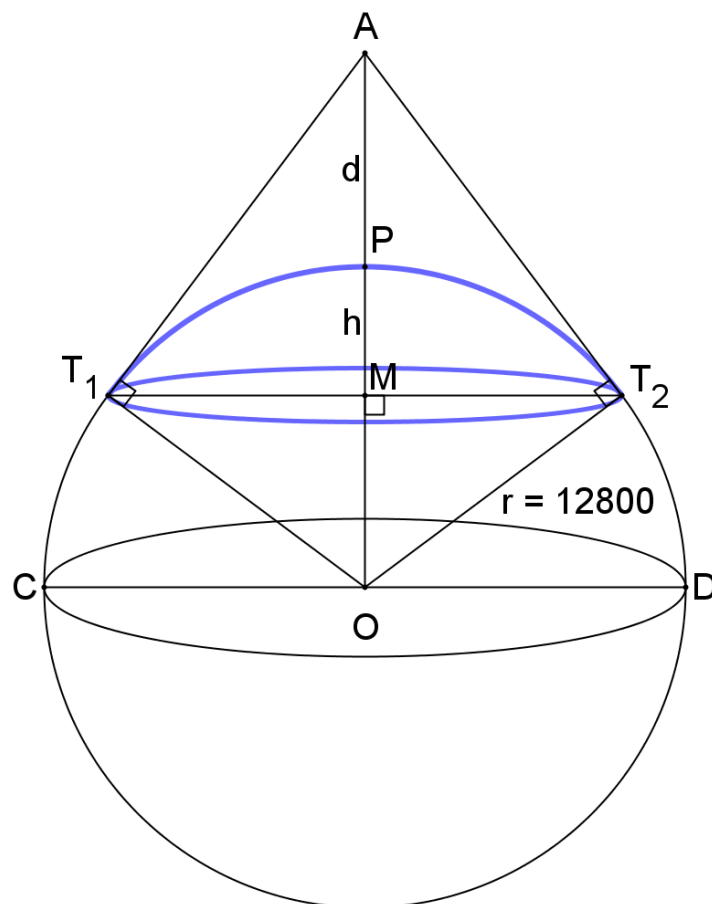
RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO: **(As alternativas foram alteradas, pois não havia resposta correta)**

O tanque cheio e o tanque com água a $\frac{1}{4}$ da altura são representados por dois cones semelhantes. A relação entre seus volumes é igual ao cubo da razão de semelhança. Assim, temos:

$$\frac{V_{1/4}}{V_{cheio}} = \left(\frac{h/4}{h}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{V_{1/4}}{6000} = \frac{1}{64} \Leftrightarrow V_{1/4} = 93,75\ \ell.$$

15) Um astronauta, em sua nave espacial, consegue observar em certo momento exatamente $\frac{1}{6}$ da superfície de um planeta. Determine a que distância ele está da superfície desse planeta. Considere o raio do planeta igual a 12800 km.
a) 1300 km
b) 1500 km
c) 1600 km
d) 3200 km
e) 6400 km

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A figura abaixo representa a situação descrita no enunciado e o ponto A representa o astronauta. Observe que a superfície da Terra foi considerada uma superfície esférica.

A área S_C que o astronauta consegue observar é a área de uma calota esférica em uma esfera de raio $r = 12800$ e altura $h = PM$.

A superfície da esfera é $S_e = 4\pi r^2$, então a área que o astronauta observa é $S_c = \frac{1}{6} \cdot S_e = \frac{4\pi r^2}{6}$.

A área da calota esférica de raio r e altura h é $S_c = 2\pi rh$.

Igualando as duas expressões para a área da calota, temos: $2\pi rh = \frac{4\pi r^2}{6} \Leftrightarrow h = \frac{r}{3}$.

$$OM = OP - PM = r - \frac{r}{3} = \frac{2r}{3}$$

No triângulo retângulo AOT_2, temos:

$$OT_2^2 = AO \cdot OM \Leftrightarrow r^2 = AO \cdot \frac{2r}{3} \Leftrightarrow AO = \frac{3r}{2} = \frac{3}{2} \cdot 12800 = 19200$$

A distância do astronauta à superfície da Terra é $d = AP = AO - OP = 19200 - 12800 = 6400 \text{ km}$.

16) O valor da integral $\int xe^{x^2}dx$ é

a) $\frac{1}{4}\cdot e^{x^2}+c$

b) $\frac{x}{2}\cdot e^{x^2}+c$

c) $\frac{1}{2}\cdot e^{x^2}+c$

d) $\frac{1}{2}\cdot e^{x}+c$

e) $\frac{1}{4}\cdot e^{x}+c$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$x^2=u \Rightarrow 2xdx=du$

$\int xe^{x^2}dx=\int e^u\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^u du=\frac{1}{2}e^u+c=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$

17) O valor da expressão $\frac{\left(\frac{27}{64}\cdot 10^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{-4}{3}}}$ é

a) $\frac{25}{3}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{6}{25}$

d) $\frac{6}{5}$

e) $\frac{3}{25}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\frac{\left(\frac{27}{64}\cdot 10^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{-4}{3}}}=\frac{\left(\frac{3^3}{4^3}\cdot 10^{-6}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2^3\right)^{\frac{-4}{3}}}=\frac{\frac{3^{3\cdot\frac{1}{3}}}{4^{3\cdot\frac{1}{3}}}\cdot 10^{(-6)\cdot\frac{1}{3}}}{2^{3\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)}}=\frac{\frac{3}{4}\cdot 10^{-2}}{2^{-4}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2^4}{10^2}=\frac{3}{2^2}\cdot\frac{2^4}{2^2\cdot 5^2}=\frac{3}{25}$$

18) Sabe-se que uma partícula move-se segundo a equação $S(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t-2$, onde t é o tempo em segundos e S é a posição em metros. Pode-se afirmar que a aceleração da partícula, quando t = 2 s, é

a) $3\ m/s^2$
b) $5\ m/s^2$
c) $7\ m/s^2$
d) $8\ m/s^2$
e) $10\ m/s^2$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$S(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+t-2$$

$$v(t)=\frac{dS}{dt}(t)=t^2+t+1$$

$$a(t)=\frac{dv}{dt}(t)=2t+1$$

$$t=2\ s\Rightarrow a(2)=2\cdot 2+1=5\ m/s^2$$

19) Seja $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ uma matriz quadrada de ordem 3, onde cada termo é dado pela lei $a_{ij}=\begin{cases}-i+j, & \text{se } i+j \text{ é par}\\ i-j, & \text{se } i+j \text{ é ímpar}\end{cases}$. Pode-se afirmar que o valor de $\det A$ é

a) 0
b) −12
c) 12
d) 4
e) −4

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$a_{11}=-1+1=0$
$a_{12}=1-2=-1$
$a_{13}=-1+3=2$
$a_{21}=2-1=1$
$a_{22}=-2+2=0$
$a_{23}=2-3=-1$
$a_{31}=-3+1=-2$
$a_{32}=3-2=1$

$$\det A=\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-2+2=0$$

$a_{33} = -3 + 3 = 0$

20) Seja C uma circunferência de raio 2 centrada na origem do plano xy. Um ponto P do 1º quadrante fixado sobre C determina um segmento OP, onde O é a origem, que forma um ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos com o eixo das abscissas. Pode-se afirmar que a reta tangente ao gráfico de C passando por P é dada por

a) $x + y - 2 = 0$

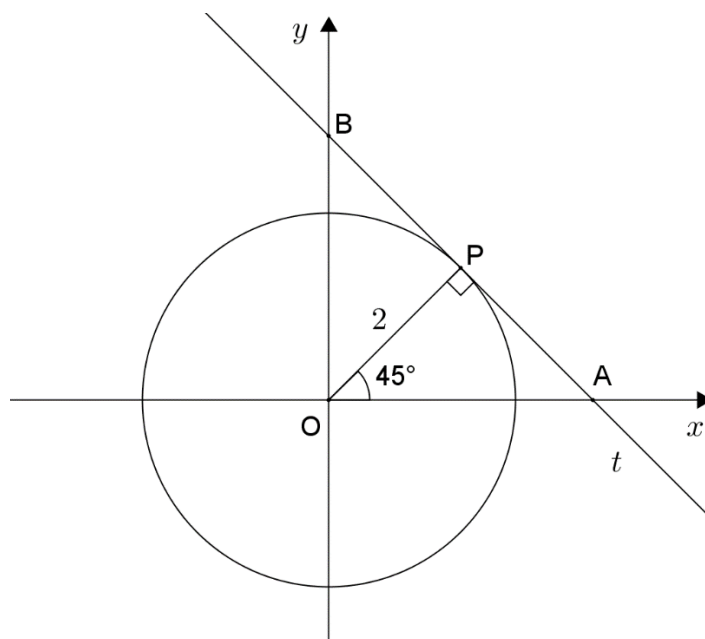
b) $\sqrt{2}x + y - 1 = 0$

c) $-\sqrt{2}x + y - 2 = 0$

d) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$

e) $x - y - 2\sqrt{2} = 0$

RESPOSTA: d

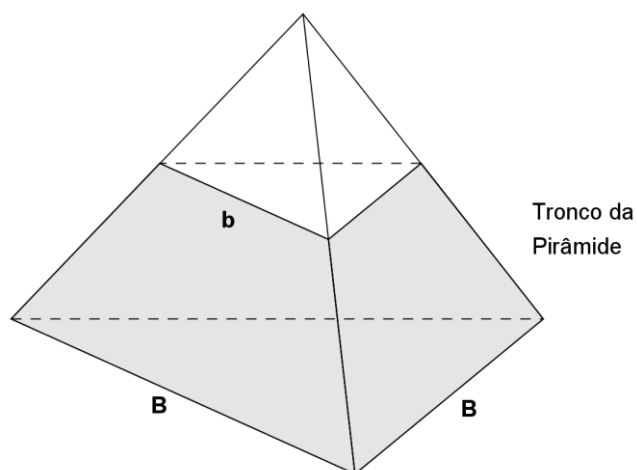
RESOLUÇÃO:

Seja t a reta tangente à circunferência em P e sejam A e B os pontos onde t corta o eixo das abscissas e das ordenadas, respectivamente.

Como $A\hat{O}P = \frac{\pi}{4}\text{ rad} = 45^\circ$, então AOB é um triângulo retângulo isósceles. Assim, temos:

$$OA = OB = \frac{OP}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\sqrt{2}/2} = 2\sqrt{2}.$$

A equação segmentária de t é dada por $\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{y}{2\sqrt{2}} = 1 \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{2} = 0$.

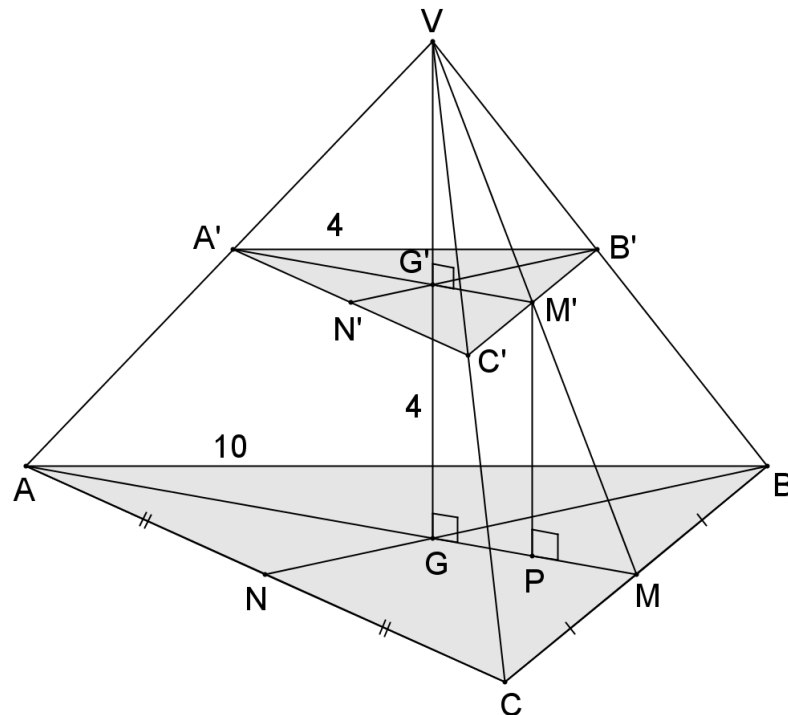
PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2013/2014

1) A área lateral de um tronco de pirâmide triangular regular cujas bases são paralelas e têm áreas $25\sqrt{3}\text{ cm}^2$ e $4\sqrt{3}\text{ cm}^2$ e altura 4 cm é, em cm^2,

a) $19\sqrt{3}$
b) $25\sqrt{3}$
c) $15\sqrt{19}$
d) $21\sqrt{19}$
e) $25\sqrt{15}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Sejam x a aresta da base maior e y a aresta da base menor do tronco de pirâmide que são triângulos equiláteros, então

$$S_B = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10$$

$$S_b = \frac{y^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = 4$$

As faces laterais do tronco de pirâmide são trapézios isósceles congruentes. Para encontrar a área lateral do tronco de pirâmide, precisamos encontrar a altura MM' de uma face lateral.

No triângulo equilátero $A'B'C'$ de lado 4, temos $G'M' = \frac{1}{3} \cdot A'M' = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

No triângulo equilátero ABC de lado 10, temos $GM = \frac{1}{3} \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Como o quadrilátero $G'GPM'$ é um retângulo, então $GP = G'M' = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $PM' = GG' = 4$ e

$PM = GM - GP = \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo PMM', temos

$MM'^2 = PM'^2 + PM^2 = 4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 19 \Leftrightarrow MM' = \sqrt{19}$

Assim, a área lateral do tronco de pirâmide triangular regular é igual a

$S_L = 3 \cdot \frac{(10+4) \cdot \sqrt{19}}{2} = 21\sqrt{19}\ \text{cm}^2$.

2) A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de $2\ \text{cm}$. Se a sua área é menor ou igual a $35\ \text{cm}^2$, então todos os possíveis valores de x, em cm, satisfazem:

a) $0 < x < 7$
b) $0 < x < 5$
c) $2 < x \leq 5$
d) $2 < x \leq 7$
e) $2 < x < 7$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A diferença entre o comprimento x e a largura y de um retângulo é de 2 cm, então $x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$.
Se a área desse retângulo é menor ou igual a 35 cm^2, então
$S = xy = x(x-2) \le 35 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 \le 0 \Leftrightarrow -5 \le x \le 7$.
Como x e y são medidas dos lados de um retângulo, então $x > 0$ e $y = x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$, o que implica $x > 2$.
Fazendo a interseção dos intervalos $-5 \le x \le 7$ e $x > 2$, temos $2 < x \le 7$.

3) Uma pesquisa indica a taxa de crescimento populacional de uma cidade através da função $P(x) = 117 + 200x$, por pessoas anualmente há x anos. Passados 10 anos, o crescimento é dado pela integral $\int_0^{10} (117 + 200x)\,dx$. Pode-se afirmar que esse crescimento será de

a) 10130 pessoas.
b) 11170 pessoas.
c) 11200 pessoas.
d) 11310 pessoas.
e) 12171 pessoas.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O crescimento pedido é o valor da integral definida $\int_0^{10} (117 + 200x)\,dx$. Assim, temos:

$$\int_0^{10} (117 + 200x)\,dx = \left[117x + 200 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^{10} = \left[117x + 100x^2\right]_0^{10} =$$
$$= \left(117 \cdot 10 + 100 \cdot 10^2\right) - \left(117 \cdot 0 + 100 \cdot 0^2\right) = 11170$$

4) O valor da soma de a e b, para que a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$ seja exata, é

a) -1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Se a divisão de $f(x) = x^3 + ax + b$ por $g(x) = 2x^2 + 2x - 6$ é exata, então o resto é $R(x) = 0$ e o quociente é do 1° grau e da forma $Q(x) = cx + d$.
Representando a divisão de acordo com o algoritmo de Euclides, temos:

$f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R(x) \Leftrightarrow x^3 + ax + b = (2x^2 + 2x - 6)(cx + d) + 0$

$\Leftrightarrow x^3 + ax + b = 2cx^3 + (2d + 2c)x^2 + (2d - 6c)x - 6d$

Como a igualdade acima deve ser válida para qualquer valor de x, então os dois lados da igualdade devem ser polinômios idênticos. Assim, temos:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2c \Leftrightarrow c = 1/2 \\ 0 = 2d + 2c \Leftrightarrow 0 = 2d + 1 \Leftrightarrow d = -1/2 \\ a = 2d - 6c \Rightarrow a = 2 \cdot (-1/2) - 6 \cdot (1/2) \Leftrightarrow a = -4 \\ b = -6d \Rightarrow b = -6 \cdot (-1/2) \Leftrightarrow b = 3 \end{cases}$$

Portanto, $a + b = (-4) + 3 = -1$.

5) Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$. Então, o produto P e a soma S de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg} x$ são, respectivamente,

a) $P = 1$ e $S = 0$
b) $P = 1$ e $S = 5$
c) $P = -1$ e $S = 0$
d) $P = -1$ e $S = 5$
e) $P = 1$ e $S = -5$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Dividindo $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{5}$ por $\cos^2 x$ em ambos os lados, temos:

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1}{5\cos^2 x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\sec^2 x}{5} \Leftrightarrow 5\operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1 = 0$$

Analisando o discriminante da equação do 2° grau, temos: $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 21 > 0$. Logo, a equação possui duas raízes reais.

Dessa forma, podemos afirmar que o produto P e a soma S de todos os possíveis valores de $\operatorname{tg} x$ são $P = \frac{1}{1} = 1$ e $S = \frac{-(-5)}{1} = 5$.

6) Suponha um lote de dez peças, sendo duas defeituosas. Testam-se as peças, uma a uma, até que sejam encontradas as duas defeituosas. A probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste é igual a

a) $1/45$
b) $2/45$
c) $1/15$
d) $4/45$
e) $1/9$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Seja D o evento “encontrar uma bola defeituosa no teste” e B o evento “encontrar uma bola defeituosa no teste”.
Para que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste, temos duas possibilidades para os resultados dos três primeiros testes: (B, D, D) ou (D, B, D).
Assim, a probabilidade de que a última peça defeituosa seja encontrada no terceiro teste é dada por $P = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{45}$.

7) O limite da soma da expressão $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \cdots$ é igual a

a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{4}{7}$

e) $\frac{5}{7}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A razão entre duas parcelas consecutivas da soma $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \cdots$ é $\left(\frac{3}{4}\right)^2$.
Sendo assim, trata-se da soma de uma progressão geométrica (P.G.) infinita de primeiro termo $a_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$ e razão $q = \left(\frac{3}{4}\right)^2 < 1$.
Como a razão da P. G. infinita tem módulo menor do que 1, o limite da sua soma existe e é dado por

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{7}.$$

8) Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a função real dada por $f(x) = \sqrt{4 - \left||2x-1|-6\right|}$ está definida, formam o conjunto

a) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

b) $\left[-\frac{9}{2}, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right]$
d) $\left[-\frac{5}{2},0\right)\cup\left[0,\frac{7}{2}\right)$
e) $\left[-\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right]$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Para que a função real $f(x)=\sqrt{4-||2x-1|-6|}$ esteja definida devemos ter
$4-||2x-1|-6|\geq 0 \Leftrightarrow ||2x-1|-6|\leq 4 \Leftrightarrow -4\leq |2x-1|-6\leq 4 \Leftrightarrow 2\leq |2x-1|\leq 10$
A última expressão consiste de duas inequações simultâneas. Vamos resolver cada uma delas em separado.
$|2x-1|\geq 2 \Leftrightarrow 2x-1\leq -2 \ \vee \ 2x-1\geq 2 \Leftrightarrow x\leq -\frac{1}{2} \ \vee \ x\geq \frac{3}{2}$
$|2x-1|\leq 10 \Leftrightarrow -10\leq 2x-1\leq 10 \Leftrightarrow -9\leq 2x\leq 11 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}\leq x\leq \frac{11}{2}$
Como as duas desigualdades devem ser satisfeitas simultaneamente, devemos fazer a interseção dos intervalos. Portanto, $D_f=\left[-\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right]$.

9) Os múltiplos de 5 são escritos na disposição abaixo:

COLUNA 1	COLUNA 2	COLUNA 3	COLUNA 4	COLUNA 5
5	10	15	20	25
30	35	40	45	50
55	60	65	70	75
80	85	90	95	100
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

Caso esse padrão seja mantido indefinidamente, com certeza o número 745 pertencerá à
a) primeira coluna.
b) segunda coluna.
c) terceira coluna.
d) quarta coluna.
e) quinta coluna.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Como $745=5\cdot 149$ e $149=5\cdot 29+4$, então o número 745 aparecerá na trigésima linha e na coluna 4.

10) Se $g(x) = 9x - 11$ e $f(g(x)) = g\left(\frac{x}{9} + 1\right)$ são funções reais, então $f(16)$ vale

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7
e) 9

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Vamos identificar o valor de x para o qual $g(x) = 16$.

$g(x) = 9x - 11 = 16 \Leftrightarrow 9x = 27 \Leftrightarrow x = 3$

Portanto, $g(3) = 16$.

Fazendo $x = 3$ na expressão $f(g(x)) = g\left(\frac{x}{9} + 1\right)$, temos:

$$f(g(3)) = g\left(\frac{3}{9} + 1\right) \Leftrightarrow f(16) = g\left(\frac{4}{3}\right) = 9 \cdot \frac{4}{3} - 11 = 1$$

11) O determinante da matriz $A = (a_{ij})$, de ordem 2, onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2i - j}\right), \text{ se } i = j \\ \text{tg}\left(\frac{\pi}{i + j}\right), \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

é igual a
a) $+1/3$.
b) $-1/3$.
c) -3.
d) $+3$.
e) -1.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$a_{11} = \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 1 - 1}\right) = \cos(\pi) = -1$

$a_{12} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{1 + 2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$a_{21} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2 + 1}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

$a_{22} = \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 2 - 2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = (-1) \cdot 0 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -3$$

12) Sabendo que a velocidade de uma partícula, em m/s, é dada pela equação $v(t) = 2 + 3 \cdot t + 5 \cdot t^2$ (onde t é o tempo medido em segundos), pode-se afirmar que, no instante $t = 5\,\text{s}$, sua aceleração é

a) $28\,\text{m/s}^2$
b) $30\,\text{m/s}^2$
c) $36\,\text{m/s}^2$
d) $47\,\text{m/s}^2$
e) $53\,\text{m/s}^2$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A aceleração da partícula no instante $t = 5$ é igual à derivada de $v(t) = 2 + 3 \cdot t + 5 \cdot t^2$, calculada em $t = 5$. Assim, temos:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}(t) = 3 + 10t$$

Portanto, a aceleração da partícula no instante $t = 5$ é $a(5) = 3 + 10 \cdot 5 = 53\,\text{m/s}^2$.

13) O valor da expressão $\left(16^{3/4} - \sqrt[4]{81^2}\right) \cdot 27^{-4/3}$ é

a) $(-1)^1 \cdot 2^{-3}$
b) $(-1)^2 \cdot 2^3$
c) $(-1)^3 \cdot 3^{-4}$
d) $(-1)^4 \cdot 2^{-4}$
e) $(-1)^5 \cdot 3^2$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\left(16^{3/4} - \sqrt[4]{81^2}\right) \cdot 27^{-4/3} = \left(\left(2^4\right)^{3/4} - \sqrt[4]{\left(3^4\right)^2}\right) \cdot \left(3^3\right)^{-4/3} = \left(2^3 - \sqrt[4]{3^8}\right) \cdot 3^{-4} =$$

$$= \left(2^3 - 3^2\right) \cdot 3^{-4} = (8 - 9) \cdot 3^{-4} = (-1) \cdot 3^{-4} = (-1)^3 \cdot 3^{-4}$$

14) O valor de x para resolver a equação $4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x$ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x \overset{\div(9^x)}{\Leftrightarrow} \frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 \text{ (não convém)} \\ \vee \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

Portanto, o conjunto solução da equação exponencial é $S = \{0\}$.

15) A única alternativa **INCORRETA** é

a) $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2) = 4$

b) $\lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3} \right) = \frac{4}{7}$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - x + 2}{3x - 2} \right)^2 = 4$

d) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \right) = 2$

e) $\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} = -2$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

a) CORRETA

Como a função $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ é contínua em todos os reais, então

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2) = f(2) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 4$.

b) CORRETA

Como a função $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3}$ é contínua em $x = -1$, então

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \left(\frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3} \right) = f(-1) = \frac{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3}{4 \cdot (-1) - 3} = \frac{4}{7}$$

c) INCORRETA

Como a função $f(x) = \left(\frac{2x^2 - x + 2}{3x - 2} \right)^2$ é contínua em $x = 1$, então

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - x + 2}{3x - 2} \right)^2 = f(1) = \left(\frac{2 \cdot 1^2 - 1 + 2}{3 \cdot 1 - 2} \right)^2 = 9 \neq 4$$

d) CORRETA

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2}{x}\right)=\frac{2+2}{2}=2$$

e) CORRETA

Como a função $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+4x+3}}$ é contínua em $x=-2$, então

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x^2+4x+3}}=f(-2)=\sqrt[3]{\frac{(-2)^3+2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+2}{(-2)^2+4\cdot(-2)+3}}=-2$$

16) O valor de $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{5+t}-\sqrt[3]{5}}{t}$ é

a) 0

b) $\frac{1}{10}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$

d) $\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}$

e) ∞

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

O limite em análise é uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Aplicando o teorema de L'Hôpital, temos:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{5+t}-\sqrt[3]{5}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}(5+t)^{-2/3}\cdot 1}{1}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{3\sqrt[3]{(5+t)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(5+0)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}$$

Alternativamente, podemos fazer $\sqrt[3]{5+t}=y\Leftrightarrow 5+t=y^3\Leftrightarrow t=y^3-5$, temos:

$(t\to 0)\Leftrightarrow\left(y\to\sqrt[3]{5}\right)$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{5+t}-\sqrt[3]{5}}{t}=\lim_{y\to\sqrt[3]{5}}\frac{y-\sqrt[3]{5}}{y^3-5}=\lim_{y\to\sqrt[3]{5}}\frac{y-\sqrt[3]{5}}{\left(y-\sqrt[3]{5}\right)\left(y^2+y\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}=$$

$$=\lim_{y\to\sqrt[3]{5}}\frac{1}{y^2+y\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{25}}$$

17) Considere um triângulo retângulo de catetos $9\,\text{cm}$ e $12\,\text{cm}$. A bissetriz interna relativa à hipotenusa desse triângulo mede, em cm,

a) $\frac{36}{7}\sqrt{2}$.

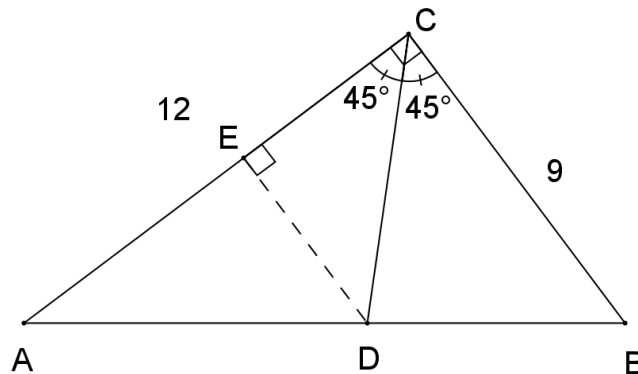
b) $\frac{25}{7}\sqrt{2}$

c) $\frac{4}{15}\sqrt{2}$

d) $\frac{7}{5}\sqrt{2}$

e) $\frac{3}{5}\sqrt{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Seja o triângulo retângulo ABC de catetos $AC = 12$ e $BC = 9$, e bissetriz relativa à hipotenusa CD.

Pelo teorema das bissetrizes, temos: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

Seja $DE \parallel BC$, então $D\hat{E}C = 90^\circ$. Aplicando o teorema de Thales, temos:

$\frac{EC}{AC} = \frac{DB}{AB} \Leftrightarrow \frac{EC}{12} = \frac{3}{4+3} \Leftrightarrow EC = \frac{3}{7} \cdot 12 = \frac{36}{7}$.

No triângulo retângulo isósceles CED, temos: $\frac{CE}{CD} = \cos 45^\circ \Leftrightarrow CD = \frac{CE}{\cos 45^\circ} = \frac{36/7}{\sqrt{2}/2} = \frac{36\sqrt{2}}{7}\ \text{cm}$.

Essa questão também pode ser resolvida da seguinte forma:

Pelo teorema de Pitágoras, temos: $AB^2 = 12^2 + 9^2 = 225 \Leftrightarrow AB = 15$

Pelo teorema das bissetrizes, temos:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{AD}{4} = \frac{DB}{3} = \frac{AD+DB}{4+3} = \frac{AB}{7} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow AD = \frac{60}{7} \wedge DB = \frac{45}{7}$.

Aplicando a lei dos senos no triângulo BCD, temos:

$\frac{CD}{\operatorname{sen} C\hat{B}D} = \frac{DB}{\operatorname{sen} B\hat{C}D} \Leftrightarrow \frac{CD}{12/15} = \frac{45/7}{\sqrt{2}/2} \Leftrightarrow CD = \frac{36\sqrt{2}}{7}\ \text{cm}$.

18) Seja $ax+by+cz+d=0$ a equação do plano que passa pelos pontos $(4,-2,2)$ e $(1,1,5)$ e é perpendicular ao plano $3x-2y+5z-1=0$. A razão $\frac{d}{b}$ é

a) $-\frac{5}{4}$.

b) $\frac{4}{7}$.

c) 8.

d) $-\frac{1}{2}$.

e) $\frac{2}{5}$.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Sejam os planos $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: 3x-2y+5z-1=0$. O vetor normal de α é $\vec{n}_\alpha=(a,b,c)$ e o vetor normal de β é $\vec{n}_\beta=(3,-2,5)$.

Como $\alpha\perp\beta$, então $\vec{n}_\alpha\perp\vec{n}_\beta \Leftrightarrow \vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta=0 \Leftrightarrow (a,b,c)\cdot(3,-2,5)=0 \Leftrightarrow 3a-2b+5c=0$.

$(4,-2,2)\in\alpha \Leftrightarrow 4a-2b+2c+d=0$

$(1,1,5)\in\alpha \Leftrightarrow a+b+5c+d=0$

As equações obtidas resultam no sistema linear:

$$\begin{cases} a+b+5c=-d \\ 4a-2b+2c=-d \\ 3a-2b+5c=0 \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-3L_1]{L_2\leftarrow L_2-4L_1} \begin{cases} a+b+5c=-d \\ -6b-18c=3d \\ -5b-10c=3d \end{cases} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)]{L_2\leftarrow L_2/-3} \begin{cases} a+b+5c=-d \\ 2b+6c=-d \\ -3b-6c=9d/5 \end{cases}$$

Somando a segunda e a terceira linha na expressão final do sistema, temos:

$$-b=-d+\frac{9d}{5}=\frac{4d}{5} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=-\frac{5}{4}$$

Essa questão também pode ser resolvida da seguinte forma:
Sejam os planos $\alpha: ax+by+cz+d=0$ e $\beta: 3x-2y+5z-1=0$.

O vetor normal de β é $\vec{n}_\beta=(3,-2,5)$ que é paralelo ao plano α, pois $\alpha\perp\beta$.

Como os pontos $(4,-2,2)$ e $(1,1,5)$ pertencem a α, então o vetor $(4,-2,2)-(1,1,5)=(3,-3,-3)=3\cdot(1,-1,-1)$ é paralelo a α.

Assim, o produto vetorial dos vetores $\vec{n}_\beta=(3,-2,5)$ e $(1,-1,-1)$, ambos paralelos ao plano α, resulta em um vetor normal a α.

$$\vec{n}_\alpha=(3,-2,5)\times(1,-1,-1)=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(7,8,-1)$$

Considerando o ponto $(1,1,5)\in\alpha$ e seja um ponto $(x,y,z)\in\alpha$, o vetor $(x-1,y-1,z-5)$ é paralelo a α e, portanto seu produto escalar com o vetor normal de α deve ser nulo. Assim, temos:

$(7,8,-1)\cdot(x-1,y-1,z-5)=0 \Leftrightarrow 7x-7+8y-8-z+5=0 \Leftrightarrow 7x+8y-z-10=0$.

Portanto, $b=8$, $d=-10$ e $\frac{d}{b}=\frac{-10}{8}=-\frac{5}{4}$.

19) Denotaremos por $n(X)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B, C conjuntos tais que $n(A\cup B)=14$, $n(A\cup C)=14$ e $n(B\cup C)=15$, $n(A\cup B\cup C)=17$ e $n(A\cap B\cap C)=3$. Então $n(A)+n(B)+n(C)$ é igual a

a) 18.
b) 20.
c) 25.
d) 29.
e) 32.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Vamos lançar mão das expressões do princípio da inclusão-exclusão para dois e três conjuntos. Assim, temos:

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$ (1)

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ (2)

$n(A\cup C)=n(A)+n(C)-n(A\cap C)$ (3)

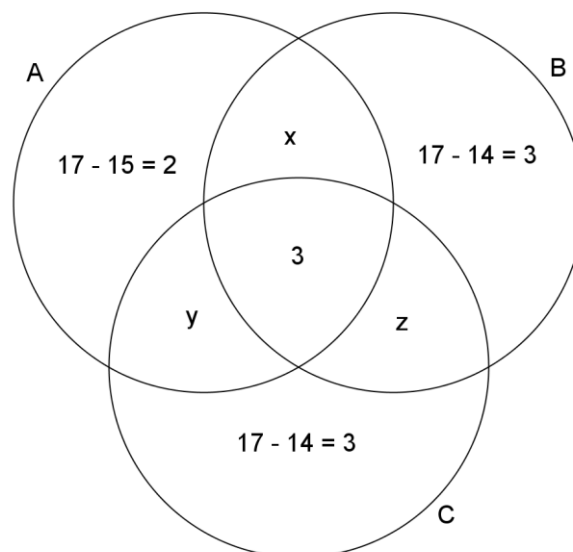
$n(B\cup C)=n(B)+n(C)-n(B\cap C)$ (4)

Subtraindo as igualdades (2), (3) e (4) da igualdade (1), temos:

$n(A\cup B\cup C)-n(A\cup B)-n(A\cup C)-n(B\cup C)=-n(A)-n(B)-n(C)+n(A\cap B\cap C)$

$\Leftrightarrow n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B)+n(A\cup C)+n(B\cup C)-n(A\cup B\cup C)+n(A\cap B\cap C)$

Substituindo os valores do enunciado, temos: $n(A)+n(B)+n(C)=14+14+15-17+3=29$.

Essa questão também pode ser resolvida da seguinte forma, usando diagramas de Venn:

$n(A\cup B)=14\Rightarrow x+y+z+8=14\Leftrightarrow x+y+z=6$

$n(A)+n(B)+n(C)=(x+y+5)+(x+z+6)+(y+z+6)=2(x+y+z)+17=2\cdot 6+17=29$

20) Sabendo-se que a raiz quadrada do número complexo $-16+30i$ é $(a+bi)$ ou $(c+di)$, onde $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $a>0$, pode-se afirmar que o valor de $a+d$ é:

a) $+2$.
b) $+1$.
c) 0.
d) -1.
e) -2.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Seja $x+yi$ a raiz quadrada de $-16+30i$, então

$$(x+yi)^2=-16+30i \Leftrightarrow (x^2-y^2)+2xyi=-16+30i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-16 \\ 2xy=30 \end{cases}$$

$$2xy=30 \Leftrightarrow y=\frac{15}{x} \Rightarrow x^2-\left(\frac{15}{x}\right)^2=-16 \Leftrightarrow x^4+16x^2-225=0$$

$$\Leftrightarrow x^2=-25\,(\text{não convém}) \vee x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$$

Se $x=\pm 3$, então $y=\frac{15}{x}=\pm 5$.

Portanto, as raízes quadradas de $-16+30i$ são $3+5i$ e $-3-5i$.

Como $a>0$, então $a+bi=3+5i$ e $c+di=-3-5i$. Portanto, $a+d=3+(-5)=-2$.

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2012/2013

1) O valor de $\lim_{x \to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)$ é

a) -2
b) -1
c) 0
d) 1
e) 2

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
O limite apresentado é do tipo $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)=\lim_{x \to 0+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}\right)=\lim_{x \to 0+}\frac{x+1-1}{x(x+1)}=\lim_{x \to 0+}\frac{x}{x(x+1)}=\lim_{x \to 0+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{0+1}=1.$$

2) O número de bactérias B, numa cultura, após t horas, é $B=B_0 \cdot e^{kt}$, onde k é uma constante real. Sabendo-se que o número inicial de bactérias é 100 e que essa quantidade duplica em $t=\frac{\ln 2}{2}$ horas, então o número N de bactérias, após 2 horas, satisfaz:

a) $800 < N < 1600$
b) $1600 < N < 8100$
c) $8100 < N < 128000$
d) $128000 < N < 256000$
e) $256000 < N < 512000$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Quando $t=0$, temos $B=100$, então $100=B_0 \cdot e^{k\cdot 0} \Leftrightarrow B_0=100$.
Quando $t=\frac{\ln 2}{2}$, temos $B=200$, então

$$200=100\cdot e^{k\cdot\frac{\ln 2}{2}} \Leftrightarrow 2=\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{k}{2}} \Leftrightarrow 2=2^{\frac{k}{2}} \Leftrightarrow \frac{k}{2}=1 \Leftrightarrow k=2.$$

O número N de bactérias, após 2 horas, é dado por $N=100\cdot e^{2\cdot 2}=100\cdot e^4$.
Como $2<e<3 \Rightarrow 2^4<e^4<3^4 \Rightarrow 16<e^4<81 \Rightarrow 1600<100\cdot e^4<8100 \Rightarrow 1600<N<8100$.

3) O gráfico de $f(x)=(x-3)^2\cdot e^x$, $x\in\mathbb{R}$, tem uma assíntota horizontal r. Se o gráfico de f intercepta r no ponto $P=(a,b)$, então $a^2+b\cdot e^{\text{sen}^2 a}-4a$ é igual a:

a) -3
b) -2
c) 3
d) 2
e) $\frac{1}{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-3)^2 \cdot e^x = +\infty$$

Assim, a função não possui assíntota em $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-3)^2 \cdot e^x = \lim_{x\to+\infty} (-x-3)^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+3)^2}{e^x}$$

O limite acima é do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando o teorema de L'Hôpital duas vezes, temos:

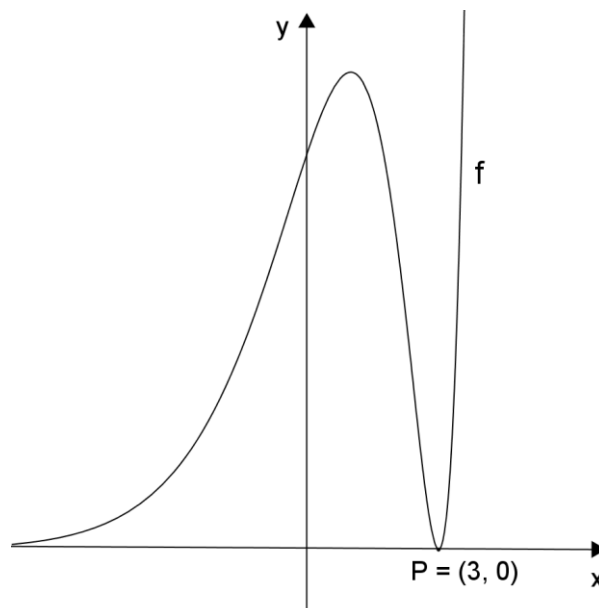
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+3)^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+3)\cdot 1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+6}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Portanto, a assíntota horizontal em $-\infty$ é a reta $r: y=0$.

Vamos agora encontrar a interseção do gráfico de f com a reta $r: y=0$.

$$(x-3)^2 \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow P = (a,b) = (3,0) \Leftrightarrow a = 3 \wedge b = 0.$$

A expressão pedida é dada por $a^2 + b \cdot e^{\text{sen}^2 a} - 4a = 3^2 + 0 \cdot e^{\text{sen}^2 3} - 4 \cdot 3 = -3$.

Observe no gráfico da função f a seguir, o comportamento da função quando $x \to -\infty$ que mostra a aproximação assintótica com a reta $y=0$.

4) Num quadrado de lado a, inscreve-se um círculo; nesse círculo se inscreve um novo quadrado e nele um novo círculo. Repetindo a operação indefinidamente, tem-se que a soma dos raios de todos os círculos é:

a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$;

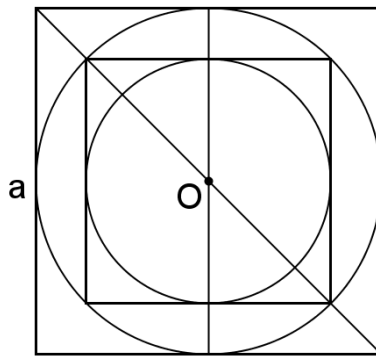
b) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$;

c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$;

d) $a\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$;

e) $2a\left(\sqrt{2}+1\right)$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

O círculo inscrito no quadrado de lado $L_1 = a$ possui raio $R_1 = \frac{a}{2}$. O quadrado inscrito no círculo de raio $R_1 = \frac{a}{2}$ possui diagonal a, portanto $L_2\sqrt{2} = a \Leftrightarrow L_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ e o círculo inscrito nesse quadrado possui raio $R_2 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Assim, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{a/2\sqrt{2}}{a/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, a razão entre os raios de dois círculos consecutivos é $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dessa forma, as medidas dos raios dos círculos formam uma progressão geométrica de primeiro termo $R_1 = \frac{a}{2}$ e razão $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Logo, a soma dos raios de todos os círculos é dada por

$$S = \frac{R_1}{1-q} = \frac{\frac{a}{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-1\right)}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

5) Se os números reais x e y são soluções da equação $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+iy}=1+i$, então $5x+15y$ é igual a:

a) 0
b) -1
c) 1
d) $\sqrt{2}$
e) $-\sqrt{2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2}=\frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2}=\frac{2i}{-2i}=-1$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+iy}=1+i\Leftrightarrow -1+\frac{1}{x+iy}=1+i\Leftrightarrow \frac{1}{x+iy}=2+i$$

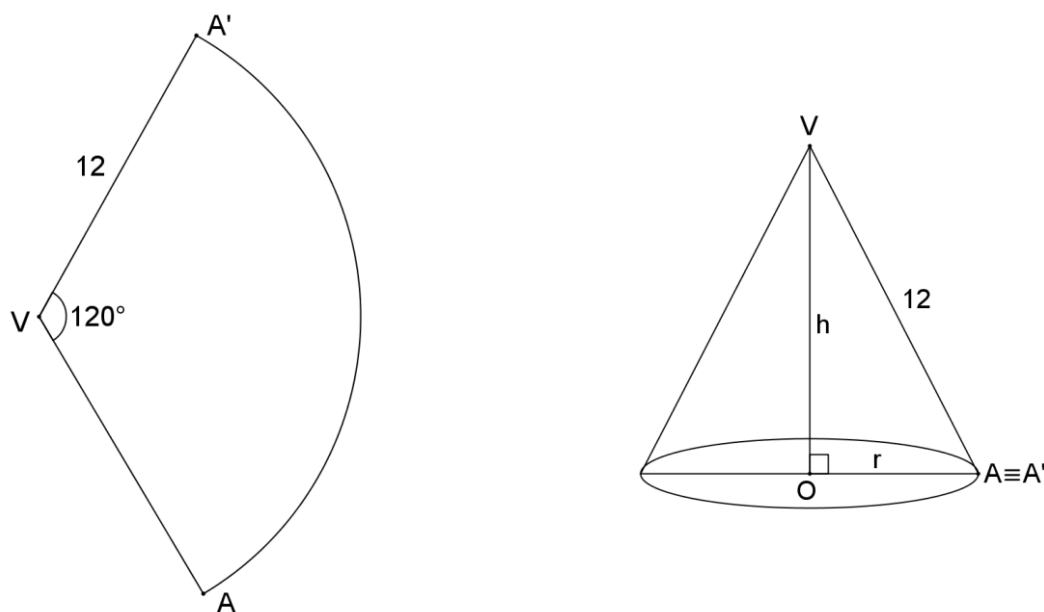
$$\Leftrightarrow x+yi=\frac{1}{2+i}\Leftrightarrow x+yi=\frac{1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{2-i}{4-i^2}=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\Leftrightarrow x=\frac{2}{5}\ \wedge\ y=-\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 5x+15y=5\cdot\frac{2}{5}+15\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-1$$

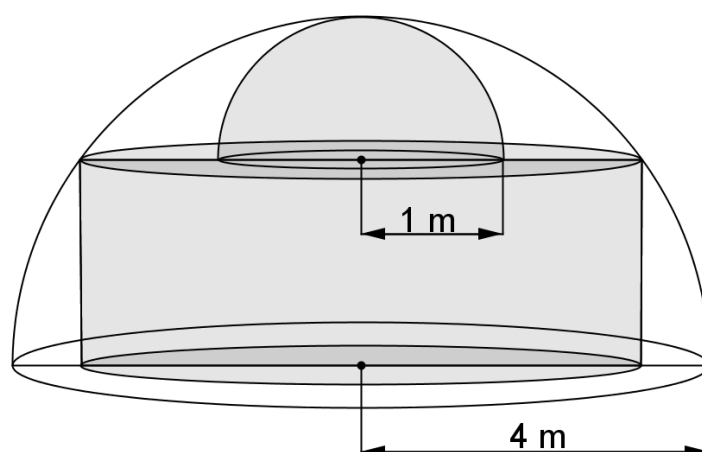
6) Um cone foi formado a partir de uma chapa de aço, no formato de um setor de 12 cm de raio e ângulo central de 120°. Então, a altura do cone é:

a) $2\sqrt{2}$
b) $4\sqrt{2}$
c) $6\sqrt{2}$
d) $8\sqrt{2}$
e) $12\sqrt{2}$

RESPOSTA: d

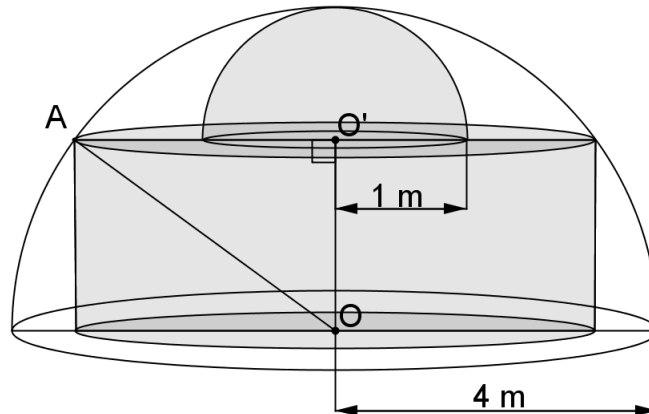
RESOLUÇÃO:

O comprimento da circunferência da base é igual ao comprimento do arco do setor circular. Assim, temos: $2\pi \cdot r = 12 \cdot \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow r = 4$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo VOA, temos: $h^2 + 4^2 = 12^2 \Leftrightarrow h^2 = 128 \Leftrightarrow h = 8\sqrt{2}$ cm.

7) Constrói-se um depósito, na forma de um sólido V, dentro de uma semiesfera de raio 4 m. O depósito é formado por uma semiesfera de raio 1 m sobreposta a um cilindro circular, dispostos conforme a figura. Então a área da superfície total de V, em m^2, é igual a:

a) $\left(20 + 14\sqrt{2}\right)\pi$.
b) $\left(17 + 4\sqrt{10}\right)\pi$.
c) $\left(8 + 4\sqrt{7}\right)\pi$.

d) $(21+7\sqrt{6})\pi$.
e) $(15+6\sqrt{7})\pi$.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

A altura do cilindro é $h = OO' = 4 - 1 = 3$.
O raio da base do cilindro é $R = O'A$ e $OA = 4$ é o raio da semiesfera maior. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $OO'A$, temos: $O'A^2 + 3^2 = 4^2 \Leftrightarrow O'A = \sqrt{7}$.
A área lateral do cilindro é dada por $2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot \sqrt{7} \cdot 3 = 6\pi\sqrt{7}$.
A área da base do cilindro é $\pi R^2 = \pi \cdot (\sqrt{7})^2 = 7\pi$.
A área da parte superior do cilindro não coberta pela semiesfera menor de raio $r = 1$ é $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi \cdot (\sqrt{7})^2 - \pi \cdot 1^2 = 6\pi$.
A área da semiesfera de menor de raio $r = 1$ é $\frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2\pi \cdot 1^2 = 2\pi$.
Portanto, a área da superfície total de V é dada por $S_V = 6\pi\sqrt{7} + 7\pi + 6\pi + 2\pi = (15 + 6\sqrt{7})\pi \text{ m}^2$.

8) A empresa Alfa Tecidos dispõe de 5 teares que funcionam 6 horas por dia, simultaneamente. Essa empresa fabrica 1800 m de tecido, com $1,20 \text{ m}$ de largura em 4 dias. Considerando que um dos teares parou de funcionar, em quantos dias, aproximadamente, a tecelagem fabricará 2000 m do mesmo tecido, com largura $0,80 \text{ m}$, e com cada uma de suas máquinas funcionando 8 horas por dia?
a) 2 dias.
b) 3 dias.
c) 4 dias.
d) 5 dias.
e) 6 dias.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Para fabricar $1800 \cdot 1,20 = 2160\text{ m}^2$ de tecido são necessárias $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$ horas de funcionamento dos teares. Portanto, um tear fabrica em 1 hora de funcionamento $\frac{2160}{120} = 18\text{ m}^2$ de tecido.

Para fabricar $2000 \cdot 0,80 = 1600\text{ m}^2$ de tecido são necessárias $\frac{1600}{18} = \frac{800}{9}$ horas de tear. Como na segunda situação estão funcionando 4 teares durante 8 horas por dia, então são necessários $\frac{\frac{800}{9}}{4 \cdot 8} = \frac{25}{9} = 2,\overline{7} \approx 3$ dias.

9) Se $\det\begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}\, x \\ \text{sen}\, y & \cos y \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$, então o valor de $3\text{sen}(x+y) + \text{tg}(x+y) - \sec(x+y)$, para $\frac{\pi}{2} \le x + y \le \pi$, é igual a:

a) 0
b) $\frac{1}{3}$
c) 2
d) 3
e) $\frac{1}{2}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$\det\begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}\, x \\ \text{sen}\, y & \cos y \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \cos(x+y) = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} \le x + y \le \pi \Rightarrow \text{sen}(x+y) = \sqrt{1 - \cos^2(x+y)} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{tg}(x+y) = \frac{\text{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\sec(x+y) = \frac{1}{\cos(x+y)} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

$$3\text{sen}(x+y) + \text{tg}(x+y) - \sec(x+y) = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \left(-2\sqrt{2}\right) - (-3) = 3$$

10) O valor da integral $\int \text{sen}\, x \cdot \cos x\, dx$ é:

a) $-\cos x + c$

b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$

c) $-\frac{1}{2}\cos x + c$

d) $+\frac{1}{4}\cos x + c$

e) $+\frac{1}{2}\cos 2x + c$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right) + c = -\frac{1}{4}\cos 2x + c$$

11) Um muro será construído para isolar a área de uma escola que está situada a 2 km de distância da estação do metrô. Esse muro será erguido ao longo de todos os pontos P, tais que a razão entre a distância de P à estação do metrô e a distância de P à escola é constante e igual a $\sqrt{2}$.
Em razão disso, dois postes, com uma câmera cada, serão fixados nos pontos do muro que estão sobre a reta que passa pela escola e é perpendicular à reta que passa pelo metrô e pela escola. Então, a distância entre os postes, em km, será:

a) 2.

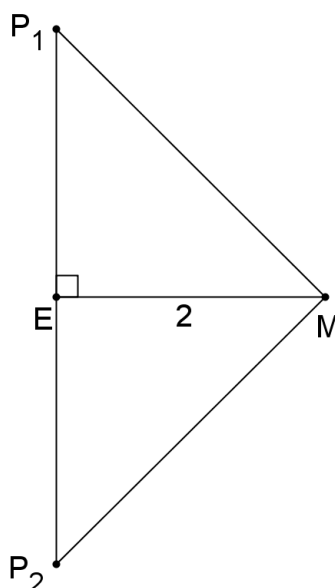
b) $2\sqrt{2}$.

c) $2\sqrt{3}$

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

Na figura os pontos E e M representam a escola e a estação do metrô, respectivamente.
Os pontos P_1 e P_2 representam a posição dos postes e os postes estão sobre o muro, então:

$\frac{P_1M}{P_1E} = \frac{P_2M}{P_2E} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{P_1E}{P_1M} = \frac{P_2E}{P_2M} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$.

Daí conclui-se que $E\hat{P}_1M = E\hat{P}_2M = 45^\circ$, então os triângulos ΔEP_1M e ΔEP_2M são retângulos isósceles e $EP_1 = EP_2 = EM = 2$.

Portanto, a distância entre os postes é $P_1P_2 = 4\text{ km}$.

Observe que os pontos do muro são os pontos do círculo de Apolônius dos pontos M e E, e razão $\sqrt{2}$.

12) O gráfico da função contínua $y = f(x)$, no plano xy, é uma curva situada acima do eixo x para $x > 0$ e possui a seguinte propriedade:
"A área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $a \le x \le b$ $(a > 0)$ é igual a área entre a curva e o eixo x no intervalo $ka \le x \le kb$ $(k > 0)$".
Se a área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x para x no intervalo $1 \le x \le 3$ é o número A então a área entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $9 \le x \le 243$ vale:

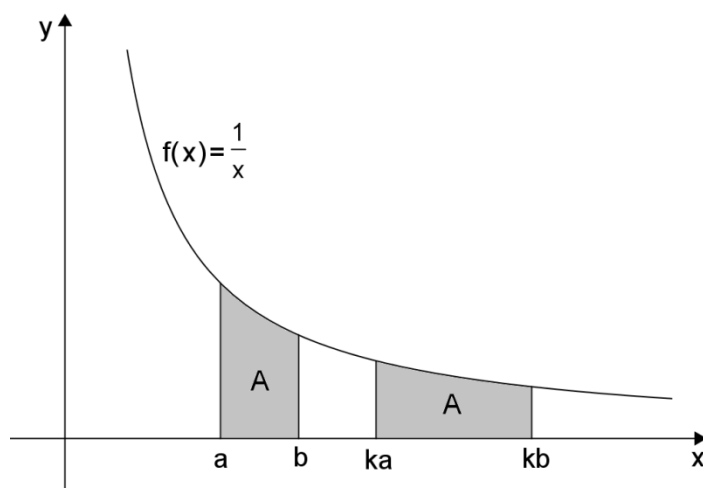
a) 2A
b) 3A
c) 4A
d) 5A
e) 6A

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Se a área entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x para $x \in [1,3]$ é o número A, então para cada uma das regiões determinadas por $x \in [9\cdot 1, 9\cdot 3] = [9,27]$, $x \in [3\cdot 9, 3\cdot 27] = [27,81]$ e $x \in [3\cdot 27, 3\cdot 81] = [81,243]$ a área também é igual a A.
Assim, para $x \in [9,243] = [9,27] \cup [27,81] \cup [81,243]$, a área entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x é igual a $A + A + A = 3A$.

Observe que o enunciado afirma que $\int_a^b f(x)dx = \int_{ka}^{kb} f(x)dx$, $\forall k > 0$. Essa propriedade é compatível com a função $f(x) = \frac{1}{x}$, com $x > 0$, pois $\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$, o que resulta

$$\int_{ka}^{kb} f(x)dx = \int_{ka}^{kb} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{ka}^{kb} = \ln(kb) - \ln(ka) = \ln\left(\frac{kb}{ka}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln(b) - \ln a = \int_a^b \frac{dx}{x} = \int_a^b f(x)dx.$$

Essa situação é ilustrada no gráfico a seguir:

13) O código Morse, desenvolvido por Samuel Morse, em 1835, é um sistema de representação que utiliza letras, números e sinais de pontuação através de um sinal codificado intermitentemente por pulsos elétricos, perturbações sonoras, sinais visuais ou sinais de rádio. Sabendo-se que o código Morse trabalha com duas letras pré-estabelecidas, ponto e traço, e codifica com palavras de 1 a 4 letras, o número de palavras criadas é:
a) 10.
b) 15.
c) 20.
d) 25.
e) 30.

RESPOSTA: e

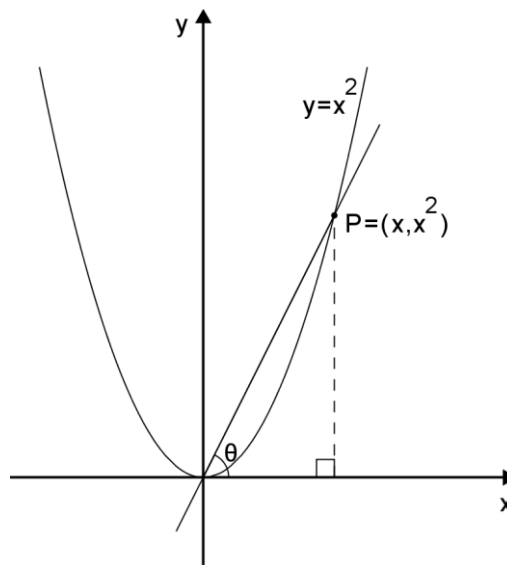
RESOLUÇÃO:
Vamos dividir o problema em quatro casos:
1°) Palavras de uma letra:
A quantidade de palavras de uma letra é 2.
2°) Palavras de duas letras:
• Se as duas letras são iguais, a quantidade de palavras é 2.
• Se as duas letras são diferentes, a quantidade de palavras é $2! = 2$.
Logo, a quantidade de palavras de duas letras é $2 + 2 = 4$.
3°) Palavras de três letras:
• Se as três letras são iguais, a quantidade de palavras é 2.
• Se a palavra possui uma letra de um tipo e duas de outro tipo, então temos 2 maneiras de escolher a letra que ocorrerá uma única vez e essa letra poderá ser colocada em 3 posições distintas. Portanto, a quantidade de palavras é $2 \cdot 3 = 6$.
Logo, a quantidade de palavras de três letras é $2 + 6 = 8$.
4°) Palavras de quatro letras:
• Se as quatro letras são iguais, a quantidade de palavras é 2.
• Se a palavra possui uma letra de um tipo e três de outro tipo, então temos 2 maneiras de escolher a letra que ocorrerá uma única vez e essa letra poderá ser colocada em 4 posições distintas. Portanto, a quantidade de palavras é $2 \cdot 4 = 8$.

• Se a palavra possui duas letras de cada tipo, então basta escolher as duas posições para colocar as duas letras de um dos tipos, ou seja, há $C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6$ palavras.
Logo, a quantidade de palavras de quatro letras é $2+8+6=16$.

Pelo princípio aditivo, o total de palavras criadas é $2+4+8+16=30$.

14) Um ponto $P(x, y)$, no primeiro quadrante do plano xy, situa-se no gráfico de $y = x^2$. Se θ é o ângulo de inclinação da reta que passa por P e pela origem, então o valor da expressão $1+y$ (onde y é a ordenada de P) é:
a) $\cos\theta$.
b) $\cos^2\theta$.
c) $\sec^2\theta$.
d) $tg^2\theta$.
e) $sen\,\theta$.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Como o ponto $P(x, y)$, no primeiro quadrante do plano xy, situa-se no gráfico de $y = x^2$, então suas coordenadas são tais que $x, y \geq 0$ e $y = x^2$.
Se θ é o ângulo de inclinação da reta que passa por $P = (x, y)$ e pela origem $(0,0)$, então $tg\,\theta = \frac{y-0}{x-0} = \frac{x^2}{x} = x$.
Portanto, $1+y = 1+x^2 = 1+tg^2\theta = \sec^2\theta$.

15) A matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ define em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{v}_i = a_{i1}\vec{i} + a_{i2}\vec{j} + a_{i3}\vec{k}$, $1 \le i \le 3$.

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo:

- $\vec{u}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_2$ e $|\vec{u}| = 3$;
- $\vec{v}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_3$ e $|\vec{v}| = 2$.

Então, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:

a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}+1)\vec{k}\right)$

b) $3\sqrt{2}\left(\vec{i} - \vec{j} + (\sqrt{2}-1)\vec{k}\right)$

c) $3\left(\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k}\right)$

d) $2\sqrt{2}\left(\vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + (1-\sqrt{2})\vec{k}\right)$

e) $-3\sqrt{2}\left(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k}\right)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

- $\vec{u}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_2$ e $|\vec{u}| = 3$;

$\vec{v}_2 = a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\vec{u} \parallel \vec{v}_2$ e tem mesmo sentido de $\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{u} = a \cdot \vec{v}_2$ e $a > 0$

$\Rightarrow |\vec{u}| = |a \cdot \vec{v}_2| = a \cdot |\vec{v}_2| \Leftrightarrow 3 = a \cdot \sqrt{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \vec{u} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{i} + \vec{j}\right)$.

- $\vec{v}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_3$ e $|\vec{v}| = 2$.

$\vec{v}_3 = a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k} = \vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow |\vec{v}_3| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$

$\vec{v} \parallel \vec{v}_3$ e tem mesmo sentido de $\vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v} = b \cdot \vec{v}_3$ e $b > 0$

$\Rightarrow |\vec{v}| = |b \cdot \vec{v}_3| = b \cdot |\vec{v}_3| \Leftrightarrow 2 = b \cdot 2 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow \vec{v} = \vec{i} + \sqrt{2}\,\vec{j} + \vec{k}$.

$$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} - 3\vec{k} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{k} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}+1)\vec{k}\right)$$

16) Se $\operatorname{tg} x + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $\operatorname{sen} x + \cos x$ vale:

a) $-\frac{7}{13}$

b) $\frac{5}{13}$

c) $\frac{12}{13}$
d) $\frac{15}{13}$
e) $\frac{17}{13}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\text{tg}\, x + \sec x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \text{tg}\, x = \frac{3}{2} - \sec x \Rightarrow \text{tg}^2\, x = \frac{9}{4} - 3\sec x + \sec^2 x$$

$$\Leftrightarrow 3\sec x = \frac{9}{4} + \left(\sec^2 x - \text{tg}^2\, x\right) = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4} \Leftrightarrow \sec x = \frac{13}{12} \Leftrightarrow \cos x = \frac{12}{13}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{3}{2} - \sec x = \frac{3}{2} - \frac{13}{12} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\, x}{12/13} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\, x + \cos x = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$$

Alternativamente, a questão pode ser resolvida como segue:

$$1 + \text{tg}^2\, x = \sec^2 x \Leftrightarrow \sec^2 x - \text{tg}^2\, x = 1 \Leftrightarrow (\sec x + \text{tg}\, x)(\sec x - \text{tg}\, x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot (\sec x - \text{tg}\, x) = 1 \Leftrightarrow \sec x - \text{tg}\, x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\, x + \sec x = \frac{3}{2} \\ \sec x - \text{tg}\, x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \sec x = \frac{13}{12} \wedge \text{tg}\, x = \frac{5}{12}$$

$$\sec x = \frac{13}{12} \Leftrightarrow \cos x = \frac{12}{13}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{\text{sen}\, x}{12/13} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\, x + \cos x = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$$

17) $P(x)$ é um polinômio de coeficientes reais e menor grau com as propriedades abaixo:

- os números $r_1 = 1$, $r_2 = i$ e $r_3 = 1 - i$ são raízes da equação $P(x) = 0$;
- $P(0) = -4$.

Então, $P(-1)$ é igual a:
a) 4
b) -2
c) -10

d) 10
e) –40

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Se $P(x)$ é um polinômio de coeficientes reais, então se o número complexo $r_2 = i$ é raiz, então o número complexo conjugado $r_4 = -i$ também é raiz. Da mesma forma, se o número complexo $r_3 = 1-i$, então o número complexo conjugado $r_5 = 1+i$.
Para que $P(x)$ tenha grau mínimo, essas devem ser as suas únicas raízes. Dessa forma, esse polinômio pode ser representado na forma fatorada como:
$P(x) = a(x-1)(x-i)(x+i)(x-(1-i))(x-(1+i)) = a(x-1)(x^2+1)(x^2-2x+2)$.
Se $P(0) = -4$, então $P(0) = a\cdot(-1)\cdot1\cdot2 = -4 \Leftrightarrow a = 2$.
Portanto, $P(x) = 2(x-1)(x^2+1)(x^2-2x+2)$ e
$P(-1) = 2(-1-1)((-1)^2+1)((-1)^2-2\cdot(-1)+2) = -40$.

18) Durante o Treinamento Físico Militar na Marinha, o uniforme usado é tênis branco, short azul e camiseta branca. Sabe-se que um determinado militar comprou um par de tênis, dois shortes e três camisetas por $R\$100,00$. E depois, dois pares de tênis, cinco shortes e oito camisetas por $R\$\,235,00$. Quanto, então, custaria para o militar um par de tênis, um short e uma camiseta?
a) $R\$\,50,00$.
b) $R\$\,55,00$.
c) $R\$\,60,00$.
d) $R\$\,65,00$.
e) $R\$\,70,00$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Seja T o preço de um tênis, S o preço de um short e C o preço de uma camiseta, temos:
$$\begin{cases} 1\cdot T + 2\cdot S + 3\cdot C = 100 \\ 2\cdot T + 5\cdot S + 8\cdot C = 235 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T + 2S = 100 - 3C \\ 2T + 5S = 235 - 8C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2T - 4S = -200 + 6C \\ 2T + 5S = 235 - 8C \end{cases}$$
$\Leftrightarrow S = 35 - 2C \wedge T = 100 - 3C - 2S = 100 - 3C - 2\cdot(35-2C) = 30 + C$
Portanto, o preço de um par de tênis, um short e uma camiseta é $T + S + C = (30+C) + (35-2C) + C = 65$ reais.

Alternativamente, a questão poderia ser resolvida como segue:
$$\begin{cases} 1\cdot T + 2\cdot S + 3\cdot C = 100 \\ 2\cdot T + 5\cdot S + 8\cdot C = 235 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3T + 6S + 9C = 300 \\ 2T + 5S + 8C = 235 \end{cases}$$
$\Rightarrow (3T + 6S + 9C) - (2T + 5S + 8C) = 300 - 235 \Leftrightarrow T + S + C = 65$ reais.

19) Dois observadores que estão em posições coincidentes com os pontos A e B, afastados 3 km entre si, medem simultaneamente o ângulo de elevação de um balão, a partir do chão, como sendo 30° e 75°, respectivamente. Se o balão está diretamente acima de um ponto no segmento de reta entre A e B, então a altura do balão, a partir do chão, em km, é:

a) $\frac{1}{3}$

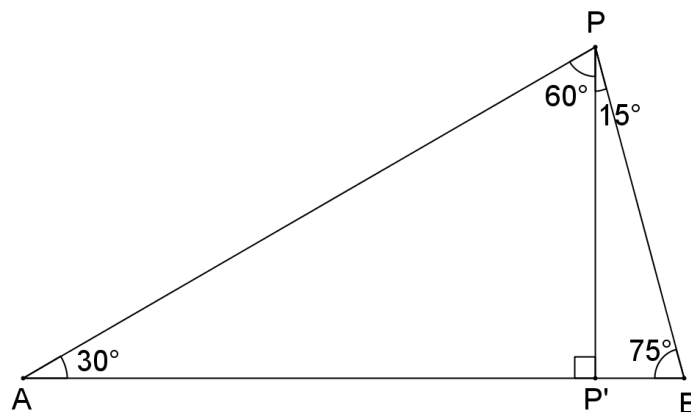
b) $\frac{5}{2}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{3}{2}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Seja P a posição do balão e P' a projeção de P sobre o segmento $\overline{AB}$, então $\Delta APP'$ e $\Delta BPP'$ são triângulos retângulos e $A\hat{P}P' = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ e $B\hat{P}P' = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

Consequentemente, o ângulo $A\hat{P}B = A\hat{P}P' + B\hat{P}P' = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ = A\hat{B}P$.

Portanto, o triângulo ABP é isósceles e $AP = AB = 3$.

No $\Delta APP'$, temos $\text{sen}\,30^\circ = \frac{PP'}{AP} = \frac{PP'}{3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow PP' = \frac{3}{2}\text{ km}$, que é a medida da altura do balão.

20) O litro da gasolina comum sofreu, há alguns dias, um aumento de $7,7\%$ e passou a custar $2,799$ reais. Já o litro do álcool sofreu um aumento de $15,8\%$, passando a custar $2,199$ reais. Sabendo que o preço do combustível é sempre cotado em milésimos de real, pode-se afirmar, aproximadamente, que a diferença de se abastecer um carro com 10 litros de gasolina e 5 litros de álcool, antes e depois do aumento, é de:

a) $R\$\,2,00$.

b) $R\$\,2,50$.

c) $R\$\,3,00$.

d) R$ $3,50$.
e) R$ $4,00$.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Seja g_0 o preço anterior do litro da gasolina, então $g_0 \cdot \left(1+\frac{7,7}{100}\right)=2,799 \Leftrightarrow g_0=\frac{2,799}{1,077}\approx 2,599$.
Seja a_0 o preço anterior do litro do álcool, então $a_0 \cdot \left(1+\frac{15,8}{100}\right)=2,199 \Leftrightarrow a_0=\frac{2,199}{1,158}\approx 1,899$.
A diferença de se abastecer um carro com 10 litros de gasolina e 5 litros de álcool, antes e depois do aumento, é $10\cdot(2,799-2,599)+5\cdot(2,199-1,899)=10\cdot 0,2+5\cdot 0,3=3,50$ reais.

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2011/2012

1) Considere-se o conjunto universo U, formado por uma turma de cálculo da Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM) e composta por alunos e alunas. São dados os subconjuntos de U:
A : conjunto formado pelos alunos; e
B : conjunto formado por todos os alunos e alunas aprovados.
Pode-se concluir que $C_U^B - (A - B)$ é a quantidade de
a) alunos aprovados.
b) alunos reprovados.
c) todos os alunos e alunas aprovados.
d) alunas aprovadas.
e) alunas reprovadas.

RESPOSTA: d

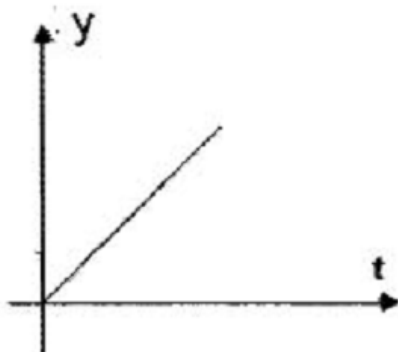
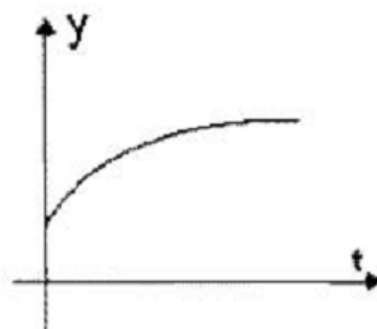
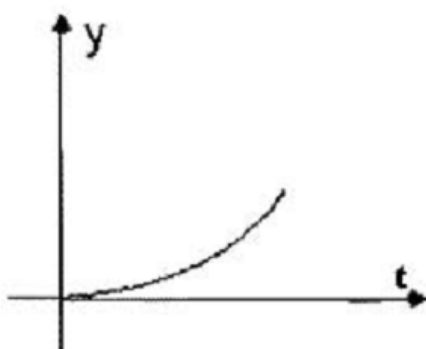
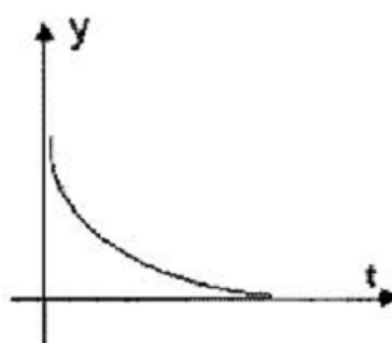
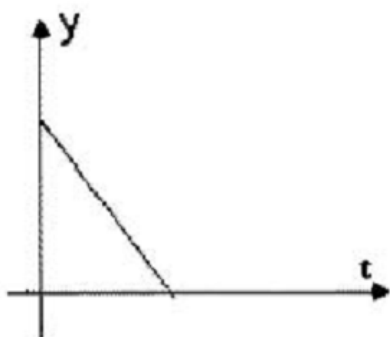
RESOLUÇÃO:
$C_U^B = U - B$ é o conjunto formado por todos os alunos e alunas reprovados.
$(A - B)$ é o conjunto formado pelos alunos reprovados.
$C_U^B - (A - B)$ é o conjunto formado pelos elemento que pertencem a C_U^B e não pertencem a $(A - B)$, ou seja, é o conjunto das **alunas reprovadas**.

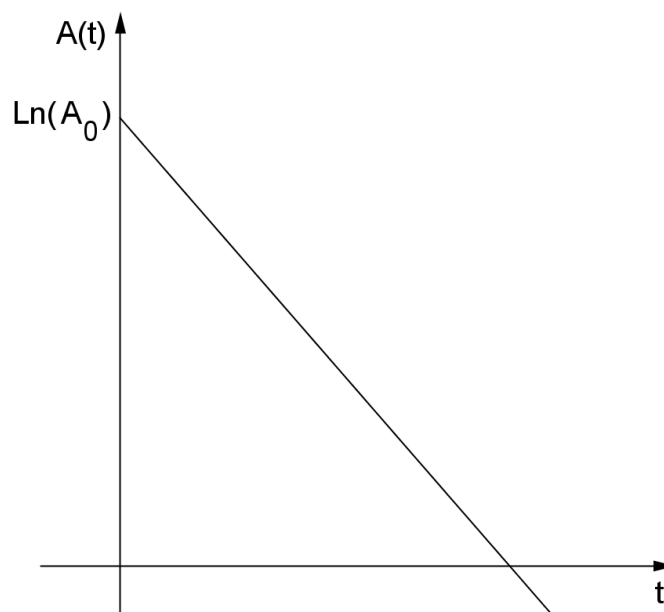
2) O lucro obtido pela venda de cada peça de roupa é $x - 10$, sendo x o preço da venda e 10 o preço do custo. A quantidade vendida por mês é igual a $70 - x$. O lucro mensal máximo obtido com a venda do produto é:
a) 1200 reais.
b) 1000 reais.
c) 900 reais.
d) 800 reais.
e) 600 reais.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
O lucro mensal $L(x)$ é dado pelo produto do lucro de cada peça pela quantidade de peças vendidas no mês. Assim, $L(x) = (70 - x) \cdot (x - 10) = -x^2 + 80x - 700$.
O lucro mensal máximo corresponde à ordenada do vértice do trinômio do 2° grau que representa $L(x)$, então $L_{MAX} = -\frac{80^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-700)}{4 \cdot (-1)} = 900$ reais.

3) Em radioatividade, na função $A(t) = A_0 \cdot e^{-\varphi t}$, temos que:
I. A é a quantidade de substância radioativa ainda existente, no instante t;
II. φ é a constante de desintegração e $\varphi > 0$;

III. A_0 é a amostra inicial no instante t_0; e
IV. t é o tempo.
De acordo com as informações acima, o gráfico que melhor representa a função $y(t) = \text{Ln}(A(t))$ é:

a)
b)
c)
d)
e)
RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$A(t) = A_0 \cdot e^{-\varphi t} \Rightarrow y(t) = \text{Ln}(A(t)) = \text{Ln}\left(A_0 \cdot e^{-\varphi t}\right) = \text{Ln}(A_0) - \varphi t \cdot \text{Ln}(e) = \text{Ln}(A_0) - \varphi \cdot t$
Logo, $y(t) = \text{Ln}(A_0) - \varphi \cdot t$ é uma função do 1° grau de coeficiente angular $-\varphi < 0$, cujo gráfico é uma reta decrescente, como mostrado abaixo.

Note que a alternativa (e) é a única que mostra o gráfico de uma função do 1° grau decrescente, mas os dados do problema não permitem identificar o sinal de $\text{Ln}(A_0)$. Se $0 < A_0 < 1$, então $\text{Ln}(A_0) < 0$, e se $A_0 > 1$, então $\text{Ln}(A_0) > 0$.

4) Um recipiente na forma de um cilindro circular reto contém um líquido até um certo nível. Colocando-se nesse recipiente uma esfera, o nível do líquido aumenta 2 cm. Sabendo-se que o raio do cilindro mede $3\sqrt{2}\text{ cm}$, conclui-se que o raio da esfera, em cm, mede:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
O volume da esfera de raio r deve ser igual ao volume adicional no cilindro, ou seja, igual ao volume de um cilindro de raio da base $R = 3\sqrt{2}\text{ cm}$ e altura $h = 2\text{ cm}$. Assim,

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot 2 \Leftrightarrow r^3 = 27 \Leftrightarrow r = 3\text{ cm}$$

5) Um professor escreveu no quadro-negro uma equação do segundo grau e pediu que os alunos a resolvessem. Um aluno copiou errado o termo constante da equação e achou as raízes -3 e -2. Outro aluno copiou errado o coeficiente do termo do primeiro grau e achou as raízes 1 e 4. A diferença positiva entre as raízes da equação correta é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

e) 5

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja $ax^2+bx+c=0$ a equação do 2° grau original, onde $a \neq 0$.
Seja $ax^2+bx+c'=0$ a equação de raízes -3 e -2, então $-\frac{b}{a}=(-3)+(-2)=-5 \Leftrightarrow b=5a$.
Seja $ax^2+b'x+c=0$ a equação de raízes 1 e 4, então $\frac{c}{a}=1\cdot 4=4 \Leftrightarrow c=4a$.
Assim, a equação original pode ser escrita como:
$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow ax^2+5ax+4a=0 \Leftrightarrow x^2+5x+4=0$,
cujas raízes são -4 e -1 e a diferença positiva entre as raízes é $|(-4)-(-1)|=3$.

6) Se $f_0(x)=\frac{x}{x+1}$ e $f_{n+1}=f_o \circ f_n$ para $n=0,1,2,\ldots$ então $f_n(x)$ vale:

a) $\frac{x}{x+n}$

b) $\frac{(n+1)x}{x+1}$

c) $\frac{nx}{x+1}$

d) $\frac{x}{(n+1)x+1}$

e) $\frac{x}{nx+1}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$f_0(x)=\frac{x}{x+1}$$

$$f_1(x)=(f_0 \circ f_0)(x)=f_0(f_0(x))=f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x)=(f_0 \circ f_1)(x)=f_0(f_1(x))=f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{3x+1}$$

Vamos então supor que $f_n(x)=\frac{x}{(n+1)x+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e provar que esse resultado é verdadeiro pelo Princípio da Indução Finita (P.I.F.).
Já mostramos que a proposição é verdadeira para $n=0,1,2$.

Supondo que $f_k(x) = \dfrac{x}{(k+1)x+1}$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então temos:

$$f_{k+1}(x) = f_0 \circ f_k(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right) = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{x}{(k+2)x+1}.$$

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, conclui-se que $f_n(x) = \dfrac{x}{(n+1)x+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7) O conjunto solução da inequação $\dfrac{\log_{10}\left(x^2+\dfrac{3}{4}\right)}{(x+1)^3 \cdot (1-x)^2} \geq 0$ é:

a) $\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2},1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

b) $\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2},1\right] \cup \left]\dfrac{2}{\sqrt{3}},+\infty\right[$

c) $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2},1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

d) $\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2},1\right[\cup \left]1,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$

e) $\left]-1,-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2},1\right[\cup \left]1,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right[$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

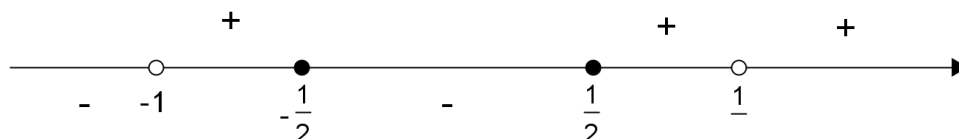
Analisando a função $f(x) = \log_{10}\left(x^2+\dfrac{3}{4}\right)$, temos:

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{3}{4} < 1 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$,

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{3}{4} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{3}{4} > 1 \Leftrightarrow x^2 - \dfrac{1}{4} > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{2} \ \vee \ x > \dfrac{1}{2}$.

Observe que a condição de existência da função logarítmica é sempre satisfeita, pois o logaritmando $\left(x^2+\dfrac{3}{4}\right)$ é sempre positivo.

Vamos dispor as raízes e pontos de descontinuidade sobre a reta real e marcar aqueles de multiplicidade par a fim de aplicar o "Método dos Intervalos".

$$\Rightarrow S = \left]-1,-\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2},1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$$

8) Considere a sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 4^{3-n} + i \cdot 4^{4-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Se i é a unidade imaginária, o módulo da soma dos infinitos termos dessa sequência é

a) $\frac{2\sqrt{7}}{3}$

b) $\frac{(2^2)\sqrt{7}}{3}$

c) $\frac{(2^3)\sqrt{17}}{3}$

d) $\frac{(2^4)\sqrt{17}}{3}$

e) $\frac{(2^6)\sqrt{17}}{3}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(4^{3-n} + i \cdot 4^{4-n}\right) = 4^3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+4i}{4^n}\right) = 2^6 (1+4i) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n}\right) =$$

$$= 2^6 (1+4i) \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 2^6 (1+4i) \cdot \frac{1}{3} = \frac{2^6}{3}(1+4i)$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\frac{2^6}{3} \cdot (1+4i)\right| = \frac{2^6}{3} \cdot \sqrt{1^2+4^2} = \frac{(2^6)\sqrt{17}}{3}$$

9) Os números inteiros de 1 a 500 são escritos na disposição abaixo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

A escrita se repete, na mesma disposição, a cada vez que se atinge o valor 500. O número escrito na quarta coluna da 134ª linha é

a) 158
b) 159
c) 160
d) 169
e) 170

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Se a escrita não fosse reiniciada, o número da quarta coluna da 134^a linha seria $5 \cdot 133 + 4 = 669$.
Como a escrita é reiniciada quando se atinge o valor 500, então o número escrito é $669 - 500 = 169$.

10) O valor do $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \right)$ é:
a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$
b) $\sqrt{a}$
c) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$
d) $2\sqrt{a}$
e) 0

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(\sqrt{x+a}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2}{x\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{a}\right)} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x + \cancel{a} - \cancel{a}}{x\left(\sqrt{x+a} + \sqrt{a}\right)} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{0+a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

11) De todos os empregados de uma empresa de navegação, 31% optaram por um plano de assistência odontológica. A firma tem a matriz na capital e somente duas filiais, uma em Macaé e a outra em Piraí. Sabe-se que 50% dos empregados trabalham na matriz, 20% dos empregados trabalham na filial Macaé, 30% dos empregados da capital optaram pelo plano de assistência odontológica e que 35% dos empregados da filial de Macaé também fizeram tal opção. Qual é, então, a porcentagem dos empregados da filial de Piraí que optaram pelo plano?
a) 40%
b) 35%
c) 30%
d) 25%
e) 15%

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A porcentagem de todos os empregados que fizeram a opção pelo plano odontológico é a média aritmética ponderada das porcentagens em cada filial onde os pesos são as quantidades (ou percentuais do total) de funcionários.

$$31\% = \frac{50\% \cdot 30\% + 20\% \cdot 35\% + 30\% \cdot x\%}{100\%} \Leftrightarrow 3100 = 1500 + 700 + 30x \Leftrightarrow x = 30$$

Logo, a porcentagem dos empregados da filial de Piraí que optaram pelo plano é 30%.

12) Em uma indústria é fabricado um produto ao custo de $R\$\,9,00$ a unidade. O proprietário anunciou a venda desse produto ao preço de x reais, para que pudesse, ainda que dando ao comprador um desconto de 10% sobre o preço anunciado, obter um lucro de 40% sobre o preço unitário de custo. Nessas condições, o valor de x é

a) 14 reais.
b) 12 reais.
c) 10 reais.
d) 8 reais.
e) 6 reais.

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O preço de venda após o desconto de 10% é $PV = x \cdot (100\% - 10\%) = x \cdot (1 - 0,1) = 0,9x$.
O lucro é de $L = 40\% \cdot 9 = 0,4 \cdot 9 = 3,6$.
Como $L = PV - PC$, temos: $3,6 = 0,9x - 9 \Leftrightarrow 0,9x = 12,6 \Leftrightarrow x = 14$ reais.

13) Se θ é o menor ângulo formado pelas retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 9$ nos pontos $P = \left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right)$ e $Q = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3}{2} \right)$ então o valor de θ, em radianos, é

a) $\frac{\pi}{12}$
b) $\frac{\pi}{6}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{5\pi}{12}$
e) $\frac{7\pi}{12}$

RESPOSTA: d

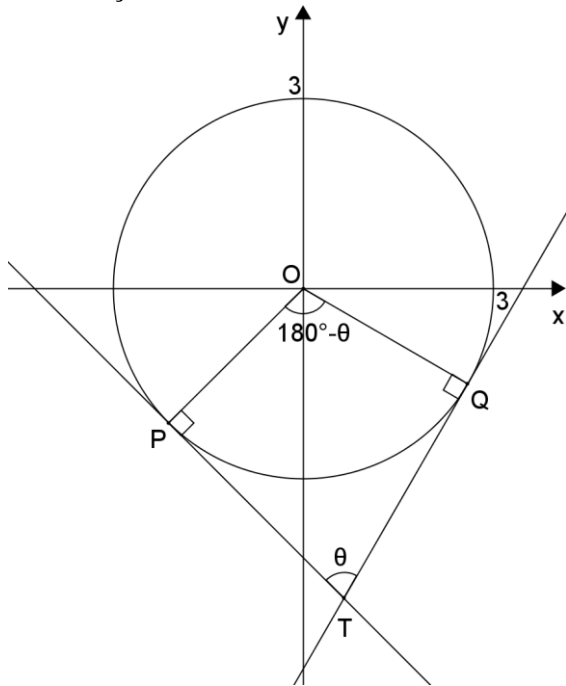
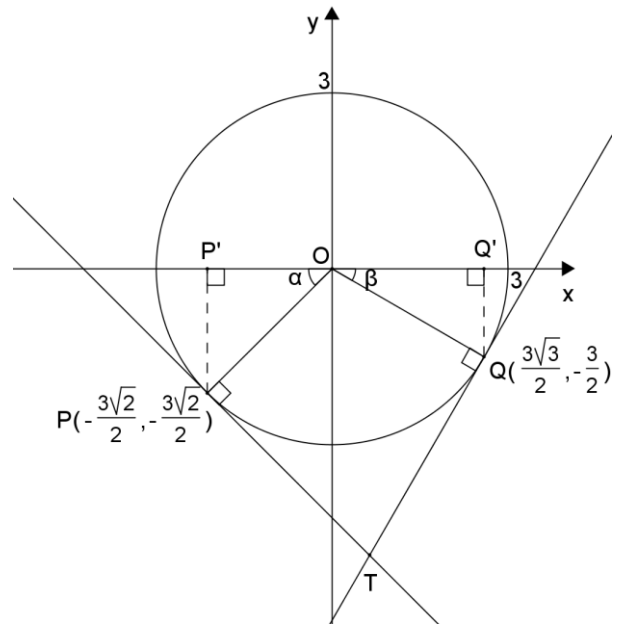



Figura 1 Figura 2

1ª solução – figura 1

A circunferência $x^2+y^2=9$ tem centro $O(0,0)$ e raio 3. O ângulo $P\hat{O}Q=180°-\theta$ é tal que

$$\cos P\hat{O}Q=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}=\frac{\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{-3}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{-9\sqrt{6}}{4}+\frac{9\sqrt{2}}{4}}{3\cdot 3}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

Logo, $P\hat{O}Q=180°-\theta=105°\Leftrightarrow\theta=75°=\frac{5\pi}{12}\text{ rad}$.

2ª solução – figura 2

$$\Delta OP'P:\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{PP'}{OP'}=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=1\Rightarrow\alpha=45°$$

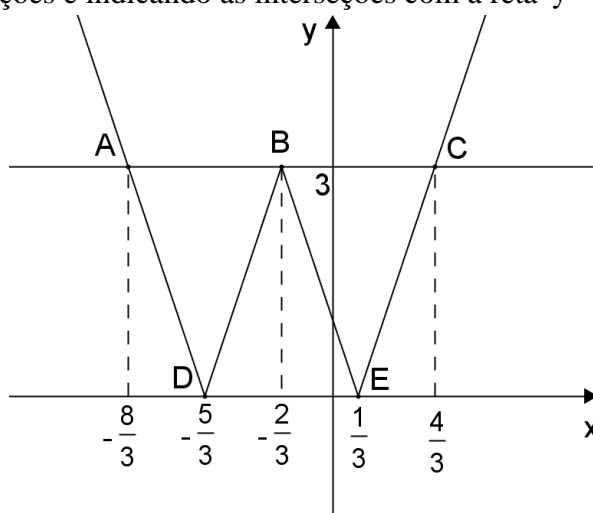
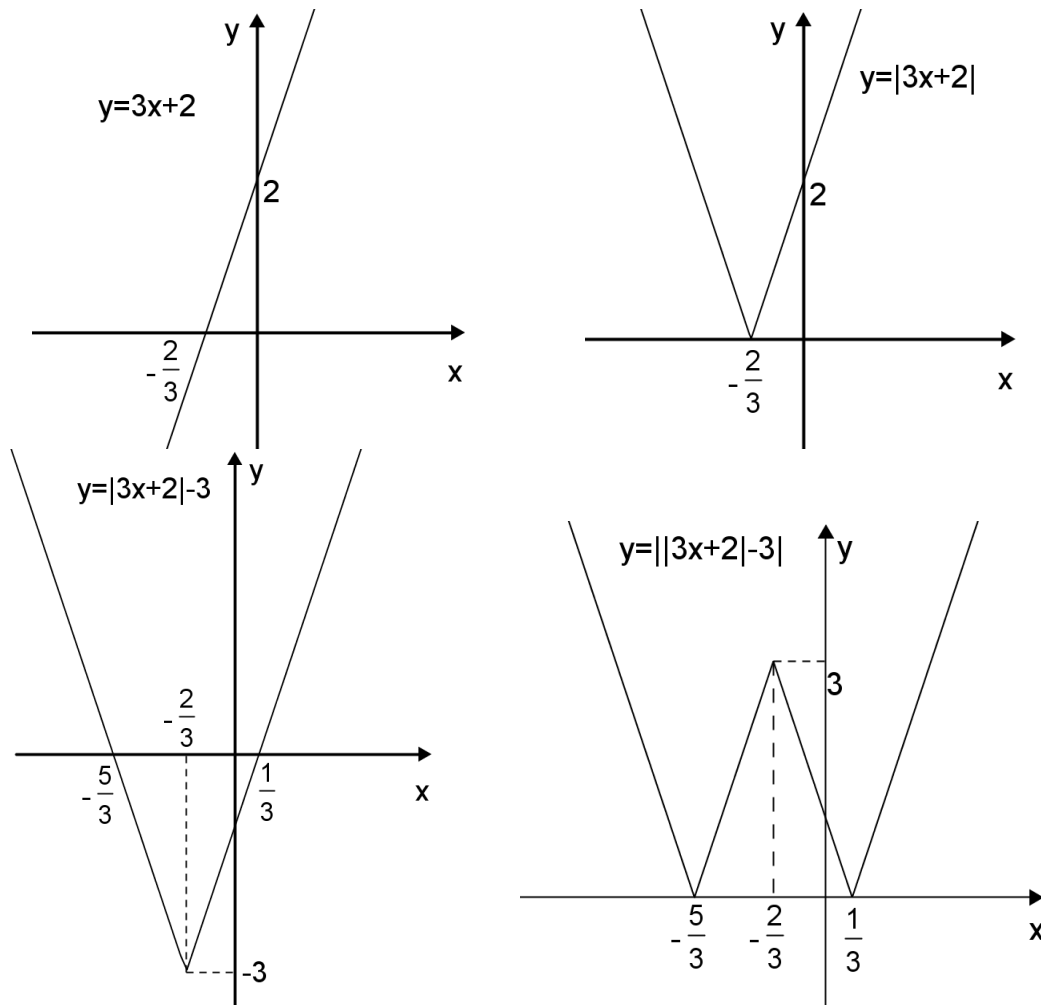
$$\Delta OQ'Q:\ \operatorname{tg}\beta=\frac{QQ'}{OQ'}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\beta=30°$$

$$P\hat{O}Q=180°-\alpha-\beta=180°-45°-30°=105°$$

$$\theta=P\hat{T}Q=180°-P\hat{O}Q=180°-105°=75°=\frac{5\pi}{12}\text{ rad}$$

14) A área entre o gráfico de $y = ||3x+2|-3|$ e a reta $y = 3$, em unidades de área, vale:
a) 6
b) 3
c) $1,5$
d) 2
e) $0,5$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Se $3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$, então $|3x+2| = 3x+2$. Se $3x+2 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$, então $|3x+2| = -3x-2$
Se $x \geq -\frac{2}{3}$, então $y = |3x-1|$. Se $x < -\frac{2}{3}$, então $y = |-3x-5|$.
Se $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{1}{3}$, então $y = -3x+1$. Se $x \geq \frac{1}{3}$, então $y = 3x-1$.
Se $x \leq -\frac{5}{3}$, então $y = -3x-5$. Se $-\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{3}$, então $y = 3x+5$.
Traçando o gráfico das funções e indicando as interseções com a reta $y = 3$, temos:

A área procurada é $S_{ABD} + S_{BCE} = \frac{\left(\frac{4}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right)\right) \cdot 3}{2} = 6$ u.a..
Alternativamente, o gráfico de $y = ||3x+2|-3|$ pode ser construído por etapas, conforme a seguir:

15) Os números que exprimem o cateto, a hipotenusa e a área de um triângulo retângulo isósceles estão em progressão aritmética, nessa ordem. O cateto do triângulo, em unidades de comprimento, vale:

a) $2\sqrt{2}-1$
b) $2\sqrt{2}-2$
c) $4\sqrt{2}-2$
d) $4\sqrt{2}-4$
e) $4\sqrt{2}-1$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja b a medida dos catetos de um triângulo retângulo isósceles, então a medida da sua hipotenusa é $b\sqrt{2}$ e sua área é $\frac{b \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2}$.

Assim, temos $\text{PA}: b, b\sqrt{2}, \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot b\sqrt{2} = b + \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow b = 4\sqrt{2} - 2 \text{ u.c.}$.

16) A solução da equação $|z|+z=1+3i$ é um número complexo de módulo:

a) $\frac{5}{4}$
b) 5
c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{5}{2}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$, então $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$|z|+z=1+3i\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}+x+yi=1+3i\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+x=1\\ y=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+9}+x=1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+9}=1-x\Leftrightarrow x^2+9=1-2x+x^2\ \wedge\ x\le 1\Leftrightarrow x=-4$$

$$\Leftrightarrow z=-4+3i\Rightarrow|z|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$$

17) O gráfico da função $f(x)=\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)-\frac{\pi}{5}\right]\cdot\left[-x-\frac{\pi}{7}\right]$ intercepta o eixo x nos pontos de coordenadas:

a) $\left(-\frac{\pi}{7},0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{5},0\right)$
b) $\left(-\frac{\pi}{7},0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5},0\right)$
c) $\left(\frac{\pi}{7},0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{5},0\right)$
d) $\left(0,-\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0,\frac{\pi}{5}\right)$
e) $\left(0,\frac{\pi}{7}\right)$ e $\left(0,-\frac{\pi}{5}\right)$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
O gráfico de $f(x)$ intercepta o eixo x quando $f(x)=0$. Assim,

$$f(x)=\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\right)-\frac{\pi}{5}\right]\cdot\left[-x-\frac{\pi}{7}\right]=0\Leftrightarrow\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg}(x))-\frac{\pi}{5}=0\ \vee\ -x-\frac{\pi}{7}=0$$

$$\Leftrightarrow\operatorname{tg}(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\ \vee\ x=-\frac{\pi}{7}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{5}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\ \vee\ x=-\frac{\pi}{7}$$

Logo, o gráfico de $f(x)$ intercepta o eixo x em infinitos pontos, dentre os quais $\left(\frac{\pi}{5},0\right)$ e $\left(-\frac{\pi}{7},0\right)$.

18) O valor de λ na equação $y^3-61y^2+\lambda y-5832=0$ de modo que suas raízes estejam em progressão geométrica, é:
a) 1017
b) 1056
c) 1078
d) 1098
e) 1121

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Sejam as raízes da equação $\left(\frac{a}{q},a,aq\right)$, pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases}\frac{a}{q}+a+aq=61\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=61\Leftrightarrow 18\cdot\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=61\Leftrightarrow\frac{1}{q}+1+q=\frac{61}{18}\\ \frac{a}{q}\cdot a+\frac{a}{q}\cdot aq+a\cdot aq=\lambda\Leftrightarrow\lambda=a^2\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=18^2\cdot\frac{61}{18}=1098\\ \frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=5832\Leftrightarrow a^3=5832\Leftrightarrow a=18\end{cases}$$

19) Sabendo que o polinômio $P(x)=x^3+kx^2+px-9$ é divisível por $D(x)=x^2-3$, podemos afirmar que:
a) $p+k=-3$
b) $\frac{p}{k}=-1$
c) $p+k=-9$
d) $p\in\mathbb{N}$ e $\sqrt{k}\in\mathbb{R}$
e) $p^k=\sqrt[4]{3}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
$D(x)=x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
Pelo teorema de D'Alembert, $D(x)$ divide $P(x)$ se, e somente se, $P(\sqrt{3})=P(-\sqrt{3})=0$. Assim,

$$\begin{cases}P(\sqrt{3})=3\sqrt{3}+3k+\sqrt{3}p-9=0\Leftrightarrow 3k+\sqrt{3}p=9-3\sqrt{3}\\ P(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}+3k-\sqrt{3}p-9=0\Leftrightarrow 3k-\sqrt{3}p=9+3\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6k=18\ \wedge\ 2\sqrt{3}p=-6\sqrt{3}\Leftrightarrow k=3\ \wedge\ p=-3\Rightarrow\frac{p}{k}=-1$$

Alternativamente, poderíamos efetuar a divisão dos polinômios e fazer o resto da divisão ser um polinômio identicamente nulo.

$$\begin{array}{rl|l} & x^3+kx^2 \quad +px \quad -9 & x^2-3 \\ & -x^3 \qquad\quad +3x & x+k \\ \hline / & kx^2+(p+3)x \quad -9 & \\ & -kx^2 \qquad\quad +3k & \\ \hline / & (p+3)x+(3k-9) & \end{array}$$

$$(p+3)x+(3k-9)=0 \Leftrightarrow p+3=0 \ \wedge \ 3k-9=0 \Leftrightarrow p=-3 \ \wedge \ k=3$$

20) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} x & 2-x & 1 \\ 2 & 3x+1 & -1 \\ -4x+1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então o valor de f no ponto de abscissa 1, onde $f(x)=\det(A)$, é:

a) 18
b) 21
c) 36
d) 81
e) 270

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$f(1)=\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 3\cdot 1+1 & -1 \\ -4\cdot 1+1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=21$$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2010/2011

1) Se $a=\sqrt[4]{3}$, $b=\frac{61}{50}$ e $c=1,22222\ldots$, assinale a opção correta.

a) $a<c<b$
b) $a<b<c$
c) $c<a<b$
d) $b<a<c$
e) $b<c<a$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$b=\frac{61}{50}=\frac{122}{100}=1,22<1,2222\ldots=c$
$c=1,2222\ldots<1,3\Rightarrow c^4<1,3^4=2,8561<3=\left(\sqrt[4]{3}\right)^4=a^4\Leftrightarrow c<a$
$\Rightarrow b<c<a$

2) Sabendo-se que $f(0)=3$ e $f(n+1)=f(n)+7$, então $f(201)$ é igual a:
a) 1206
b) 1307
c) 1410
d) 1510
e) 1606

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Para $n\in\mathbb{N}$, a função f é uma progressão aritmética de primeiro termo $f(0)=3$ e razão 7.
Logo, pode-se concluir que $f(n)=f(0)+7\cdot(n-0)=3+7n$ e que $f(201)=3+7\cdot 201=1410$.

3) Seja a função $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ (sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais) com a seguinte propriedade definida por $f(x-1)+1=\frac{f(x-1)-1}{f(x)}$. Sabendo-se que $f(0)=4$, o valor de $f(1007)$ é igual a
a) -1
b) 4
c) $-\frac{1}{4}$
d) $-\frac{5}{3}$

e) $\frac{3}{5}$

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$f(x-1)+1=\frac{f(x-1)-1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}$$

$$f(x+1)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1}=\frac{\frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}-1}{\frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}+1}=\frac{-2}{2\cdot f(x-1)}=\frac{-1}{f(x-1)}$$

$$f(x+2)=\frac{f(x+1)-1}{f(x+1)+1}=\frac{\frac{-1}{f(x-1)}-1}{\frac{-1}{f(x-1)}+1}=\frac{-f(x-1)-1}{f(x-1)-1}=$$

$$f(x+3)=\frac{f(x+2)-1}{f(x+2)+1}=\frac{\frac{-f(x-1)-1}{f(x-1)-1}-1}{\frac{-f(x-1)-1}{f(x-1)-1}+1}=\frac{-2f(x-1)}{-2}=f(x-1)$$

$$f(x+4)=\frac{f(x+3)-1}{f(x+3)+1}=\frac{f(x-1)-1}{f(x-1)+1}=f(x)$$

Logo, a função f é periódica de período 4, o que implica $f(x+4\cdot n)=f(x), \forall n\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow f(1007)=f(3+4\cdot 251)=f(3)$.

$$f(1+2)=\frac{-f(1-1)-1}{f(1-1)-1} \Leftrightarrow f(3)=\frac{-f(0)-1}{f(0)-1}=\frac{-4-1}{4-1}=-\frac{5}{3}$$

4) O conjunto solução da inequação $\frac{1+x}{1-x}\geq 1$ é:

a) $[0,+\infty)$

b) $[0,1)$

c) $(1,+\infty)$

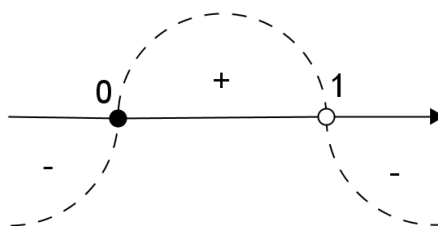
d) $[0,1]$

e) $(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\frac{1+x}{1-x}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x}-1\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{1-x}\geq 0 \Leftrightarrow 0\leq x<1 \Leftrightarrow S=[0,1)$$

A solução da inequação apresentada acima pode ser obtida facilmente pelo método dos intervalos, conforme figura abaixo:

Observe, porém, que a linha pontilhada é apenas uma referência para identificação dos sinais e não representa um esboço do gráfico da função. Em particular, ao redor do ponto 1, o comportamento da função é bem diferente, apresentando assíntotas verticais.

5) Se a sequência de inteiros positivos $(2, x, y)$ é uma Progressão Geométrica e $(x+1, y, 11)$ uma Progressão Aritmética, então, o valor de $x+y$ é
a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
$PG: (2, x, y) \Leftrightarrow x^2 = 2 \cdot y$
$PA: (x+1, y, 11) \Leftrightarrow 2y = (x+1) + 11 \Leftrightarrow 2y = x + 12$
$\Rightarrow x^2 = x + 12 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 4$
Como $(2, x, y)$ é uma sequência de inteiros positivos, então $x = 4$, $2y = 4 + 12 \Leftrightarrow y = 8$ e $x + y = 4 + 8 = 12$.

6) Sejam A, B e C matrizes de ordem 3×3 inversíveis tais que $\det A^{-1} = 3$ e $\det\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right) = 4$.

Sabendo-se que I é a matriz identidade de ordem 3, tal que $I = -3C^{-1}(2B^{-1} + A)^T$, o determinante de C é igual a
a) $-8/3$
b) $-32/3$
c) -9
d) -54
e) -288

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Lembrando que $(A^T)^T = A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $A \cdot A^{-1} = I$, $\det A^T = \det A$, $\det AB = \det A \cdot \det B$ (teorema de Binet) e, se a matriz A tem ordem n e k é um escalar, $\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$, podemos escrever o seguinte desenvolvimento:

$$I = -3C^{-1}(2B^{-1} + A)^T \Leftrightarrow C \cdot I = -3C \cdot C^{-1}(2B^{-1} + A)^T \Leftrightarrow C = -6\left(B^{-1} + \frac{1}{2}A\right)^T$$

$$\Leftrightarrow C^T = -6\left(B^{-1} + \frac{1}{2}A\right)$$

$$\Rightarrow C^T \cdot A^{-1} = -6\left(B^{-1} + \frac{1}{2}A\right) \cdot A^{-1} = -6\left(B^{-1}A^{-1} + \frac{1}{2}AA^{-1}\right) = -6\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right)$$

$$\Rightarrow \det(C^T \cdot A^{-1}) = \det\left[-6\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right)\right] \Leftrightarrow \det C^T \cdot \det(A^{-1}) = (-6)^3 \cdot \det\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right)$$

$$\Leftrightarrow \det C \cdot \det(A^{-1}) = -216 \cdot \det\left((AB)^{-1} + \frac{1}{2}I\right) \Rightarrow \det C \cdot 3 = -216 \cdot 4 \Leftrightarrow \det C = -288$$

7) Um carro percorre 240 km com o desempenho de 12 km por litro de gasolina. Ao utilizar álcool como combustível, o desempenho passa a ser 8 km por litro de álcool. Sabendo que o litro de gasolina custa R$ 2,70, qual deve ser o preço do litro de álcool para que o gasto ao percorrer a mesma distância seja igual ao gasto que se tem ao utilizar gasolina como combustível?
a) R$ 1,60
b) R$ 1,65
c) R$ 1,72
d) R$ 1,75
e) R$ 1,80

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Para percorrer 240 km usando gasolina, com desempenho de $12 \text{ km}/\ell$ são gastos $\frac{240}{12} = 20\ \ell$ a um custo de $20 \cdot 2,70 = 54 \text{ reais}$.

Para percorrer 240 km usando álcool, com desempenho de $8 \text{ km}/\ell$ são gastos $\frac{240}{8} = 30\ \ell$. Como o custo total deve ser $\text{R\$ } 54,00$, então o preço do litro do álcool deve ser $\frac{54,00}{30} = 1,80 \text{ reais}$.

8) Dada a equação $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$, assinale a opção que apresenta a distância do centro da curva à origem do sistema de coordenadas.
a) 5
b) 6
c) 8
d) $\sqrt{24}$
e) $\sqrt{29}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\cdot 2\cdot x + 2^2 + y^2 + 2\cdot 5\cdot y + 5^2 + 25 = 2^2 + 5^2$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+5)^2 = 2^2$

Logo, a equação representa uma circunferência de centro $(2,-5)$ e raio 2.
Assim, a distância do centro da curva à origem do sistema de coordenadas é
$\sqrt{(2-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{29}$.

9) Analise a função a seguir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 3p-5, & x = 2 \end{cases}$$

Para que a função acima seja contínua no ponto $x = 2$, qual deverá ser o valor de p?
a) $1/3$
b) 1
c) 3
d) -1
e) -3

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
f é contínua no ponto $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow 4 = 3p - 5 \Leftrightarrow p = 3$$

10) Sejam os números complexos z tais que $\frac{1}{3}|z| = |\overline{z+1}|$. O lugar geométrico das imagens desses números complexos é uma
a) parábola.
b) reta.
c) circunferência de raio $3/8$.
d) circunferência de raio $3/2$.
e) hipérbole.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Seja $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$, então

$$\frac{1}{3}|z| = |\overline{z+1}| \Leftrightarrow \frac{1}{3}|x+yi| = |\overline{(x+1)+yi}| \Leftrightarrow |x+yi| = 3|(x+1)-yi|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{(x+1)^2+(-y)^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 9\left(x^2+2x+1+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+8y^2+18x+9=0 \Leftrightarrow 8\left(x^2+2\cdot\frac{9}{8}x+\left(\frac{9}{8}\right)^2\right)+8y^2 = -9+\frac{9^2}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{9}{8}\right)^2+y^2 = \frac{9}{64} \Leftrightarrow \left(x+\frac{9}{8}\right)^2+y^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

Logo, o lugar geométrico das imagens dos números complexos z é uma circunferência de centro $\left(-\frac{9}{8},0\right)$ e raio $\frac{3}{8}$.

11) A divisão de um polinômio $P(x)$ por $(x-4)$ deixa resto 3, por $(x+1)$ deixa resto 8 e por $(x-2)$ deixa resto -1. O resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x-4)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ tem como soma dos coeficientes

a) -24
b) 9
c) -3
d) 0
e) -4

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Pelo teorema de D'Alembert, temos:
$P(x)$ dividido por $(x-4)$ deixa resto $3 \Leftrightarrow P(4)=3$
$P(x)$ dividido por $(x+1)$ deixa resto $8 \Leftrightarrow P(-1)=8$
$P(x)$ dividido por $(x-2)$ deixa resto $-1 \Leftrightarrow P(2)=-1$
O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-4)\cdot(x+1)\cdot(x-2)$ é um polinômio de grau máximo igual a 2, logo podemos representar esse resto como $R(x)=ax^2+bx+c$.
Pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos: $P(x)=(x-4)\cdot(x+1)\cdot(x-2)\cdot Q(x)+R(x)$, onde $Q(x)$ é o quociente dessa divisão.

$$\Rightarrow \begin{cases} P(4)=(4-4)\cdot(4+1)\cdot(4-2)\cdot Q(4)+R(4)=R(4)=16a+4b+c=3 \\ P(-1)=(-1-4)\cdot(-1+1)\cdot(-1-2)\cdot Q(-1)+R(-1)=R(-1)=a-b+c=8 \\ P(2)=(2-4)\cdot(2+1)\cdot(2-2)\cdot Q(2)+R(2)=R(2)=4a+2b+c=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a+4b+c=3 \\ a-b+c=8 \\ 4a+2b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=8 \\ 15a+5b=-5 \\ 3a+3b=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=8 \\ 3a+b=-1 \\ a+b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=8 \\ a+b=-3 \\ 2a=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=3 \end{cases}$$

Logo, $a+b+c=1+(-4)+3=0$.

12) A circunferência de equação $\left(x-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y+\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2=4+2\sqrt{2}$ intercepta o eixo das abscissas em dois pontos A e B. Sabendo que o segmento AB é o lado de um polígono regular convexo que possui centro coincidente com o centro da circunferência, calcule o perímetro desse polígono.

a) 24
b) 16
c) 15
d) $6\left(\sqrt{2}+1\right)$
e) $6\left(\sqrt{2}+2\right)$

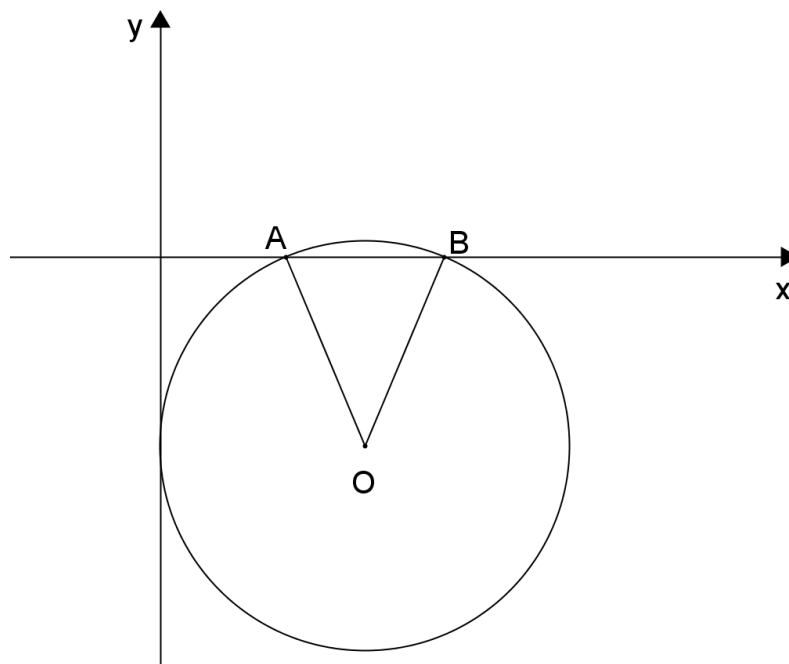
RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Os pontos de interseção da curva com o eixo das abscissas são tais que $y=0$.

$$\Rightarrow\left(x-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2+\left(0+\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2=4+2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2+3+2\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2=1\Leftrightarrow x=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\pm1$$

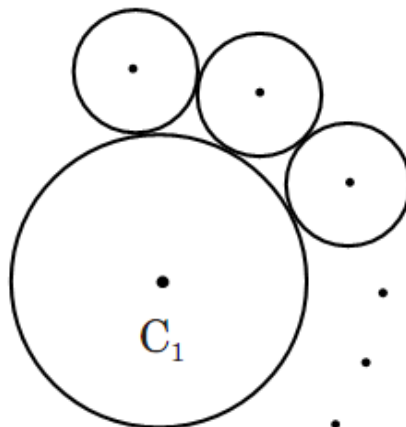
$$\Rightarrow AB=\left|\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}+1\right)-\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}-1\right)\right|=2$$

O centro da circunferência é $O\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}},-1-\sqrt{2}\right)$ e seu raio é $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$.

Aplicando a lei dos cossenos ao ΔOAB, temos:

$$2^2=\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\sqrt{4+2\sqrt{2}}\right)^2-2\sqrt{4+2\sqrt{2}}\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cos A\hat{O}B$$

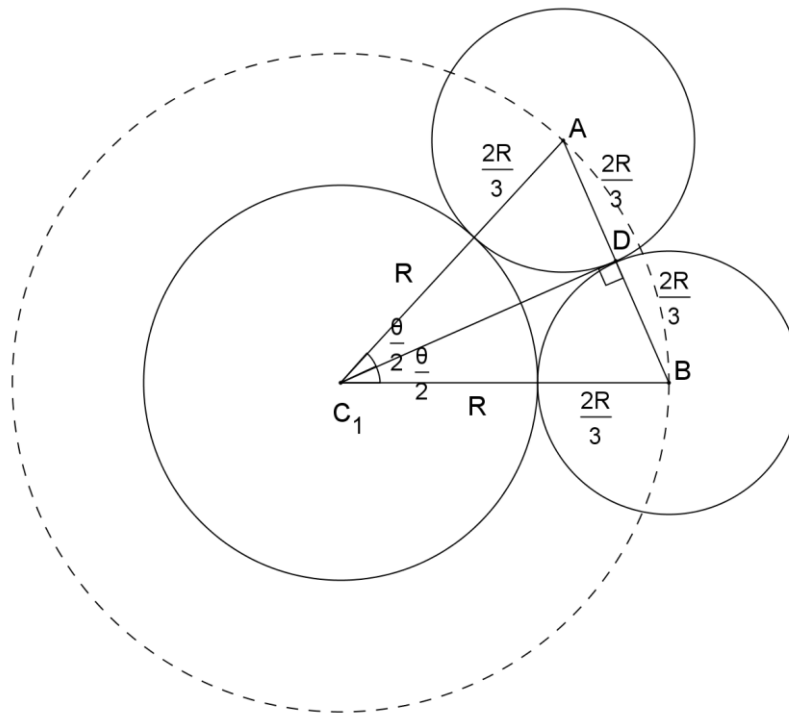
$$\Leftrightarrow 4=4+2\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}-2\left(4+2\sqrt{2}\right)\cos A\hat{O}B\Leftrightarrow\cos A\hat{O}B=\frac{-4\left(1+\sqrt{2}\right)}{-4\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow A\hat{O}B=45^\circ$$

Como $\frac{360^\circ}{45^\circ}=8$, o polígono é um octógono regular convexo e o seu perímetro é $8\cdot 2=16$

13) Analise a figura a seguir.

Seja o círculo C_1 de raio R, onde estão dispostos n círculos tangentes exteriores a C_1, todos com raios iguais a $\frac{2}{3}R$, como mostra a figura acima. Assinale a opção que representa o valor máximo de n. (Dado: $\arccos\frac{\sqrt{21}}{5}\cong 0,41\,\text{rad}$)

a) 7
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$$C_1A = C_1B = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

$$C_1D = \sqrt{\left(\frac{5R}{3}\right)^2 - \left(\frac{2R}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}R \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{3}R}{\frac{5R}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{5} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 0,41\text{rad} \Leftrightarrow \theta = 0,82\,\text{rad}$$

$$n_{MÁX} = \left\lfloor \frac{2\pi}{\theta} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 \cdot 3,14}{0,82} \right\rfloor = 7$$

14) Um projétil é lançado de baixo para cima e a sua trajetória descreve uma curva plana de equação $h = 27t - 3t^2$, onde h é a altura em cada momento, em função do tempo. Sabendo que h está em quilômetros e t em minutos, qual será a altura máxima atingida por esse projétil?

a) $6,075 \times 10$ km
b) $6,75 \times 10$ km
c) $60,75 \times 10$ km
d) $67,5 \times 10$ km
e) 675×10 km

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

O valor máximo de h ocorre no vértice da função do 2° grau em t.

$$h_{máx} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left(27^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 0\right)}{4 \cdot (-3)} = \frac{243}{4} = 6,075 \cdot 10 \text{ km}$$

15) Seja uma pirâmide quadrangular regular com arestas iguais a 2 cm. No centro da base da pirâmide, está centrada uma semiesfera que tangencia as arestas da pirâmide. Existe uma esfera de maior raio, que está apoiada externamente em uma face lateral da pirâmide e tangencia internamente a superfície curva da semiesfera. Essa esfera possui volume, em cm^3, igual a

a) $\pi \cdot \frac{27-11\sqrt{6}}{54}$

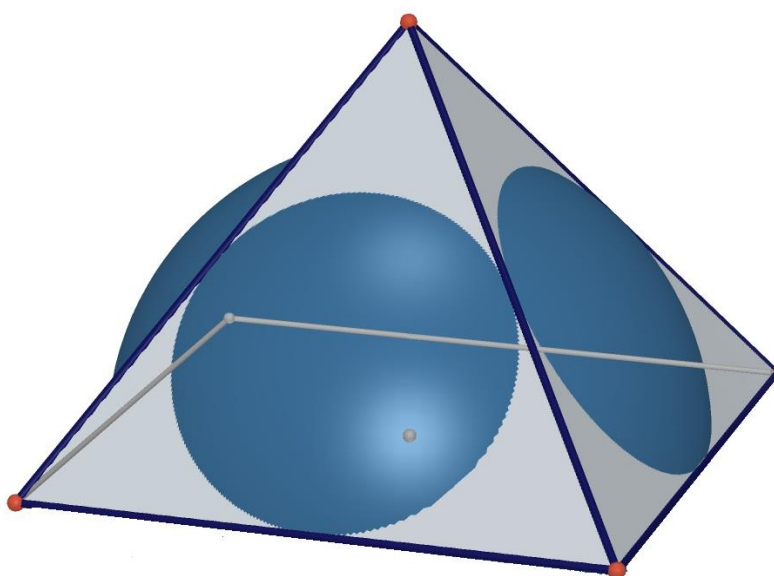
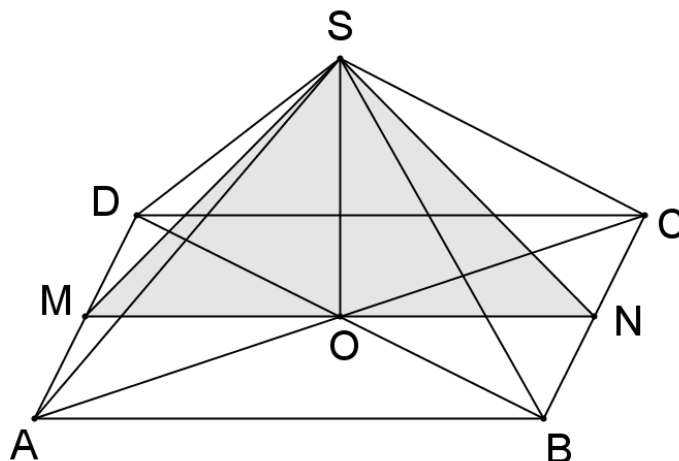
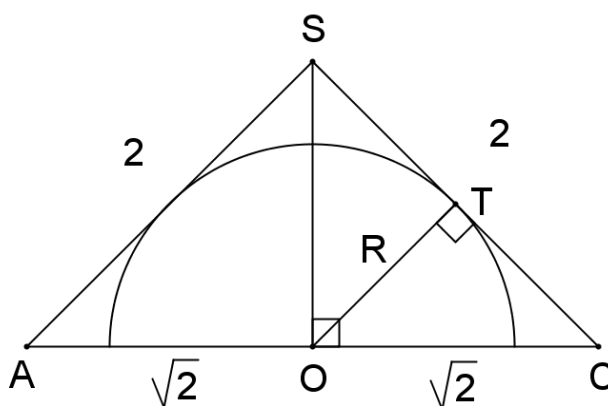
b) $\pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{24}$

c) $\pi \cdot \frac{4\sqrt{3}}{24}$

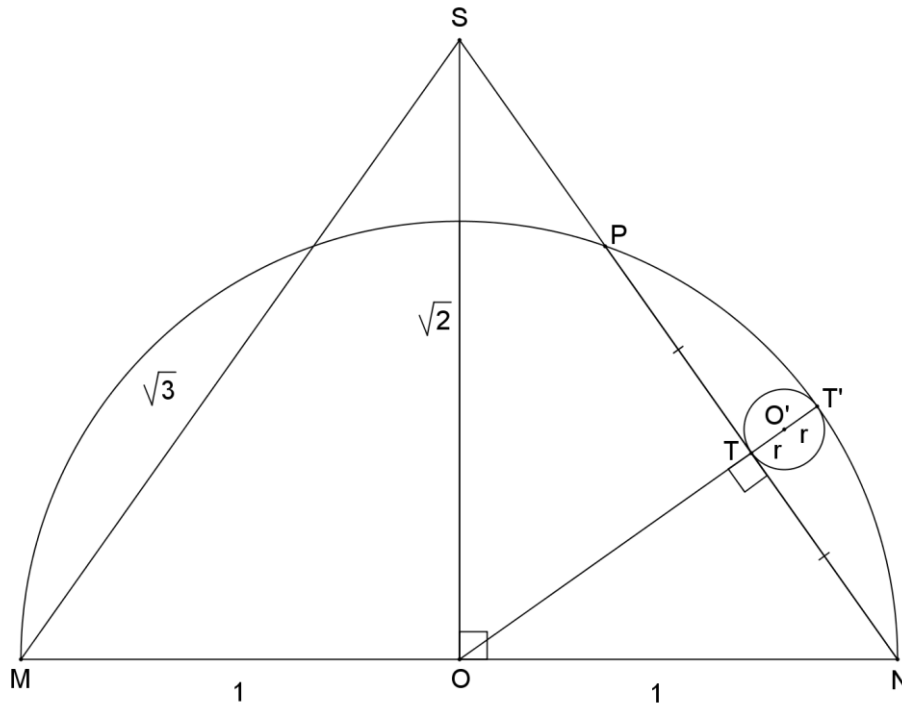
d) $\pi \cdot \frac{108-44\sqrt{6}}{27}$

e) $\pi \cdot \frac{2}{3}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Seja a pirâmide quadrangular regular $S-ABCD$.

Considerando a seção da pirâmide e da semiesfera pelo plano SAC, obtém-se a figura.

$$\cos O\hat{C}S = \frac{OC}{ST} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow O\hat{C}S = 45^\circ$$

$$\operatorname{sen} O\hat{C}S = \frac{OT}{OC} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow R = 1$$

Considerando a seção da pirâmide e da semiesfera pelo plano SMN, obtém-se a figura.

$$SM = SN = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\Delta OSN : SN \cdot OT = SO \cdot NO \Leftrightarrow \sqrt{3} \cdot OT = \sqrt{2} \cdot 1 \Leftrightarrow OT = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$OT' = OT + TT' = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{3} + 2r = 1 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{3-\sqrt{6}}{6}$$

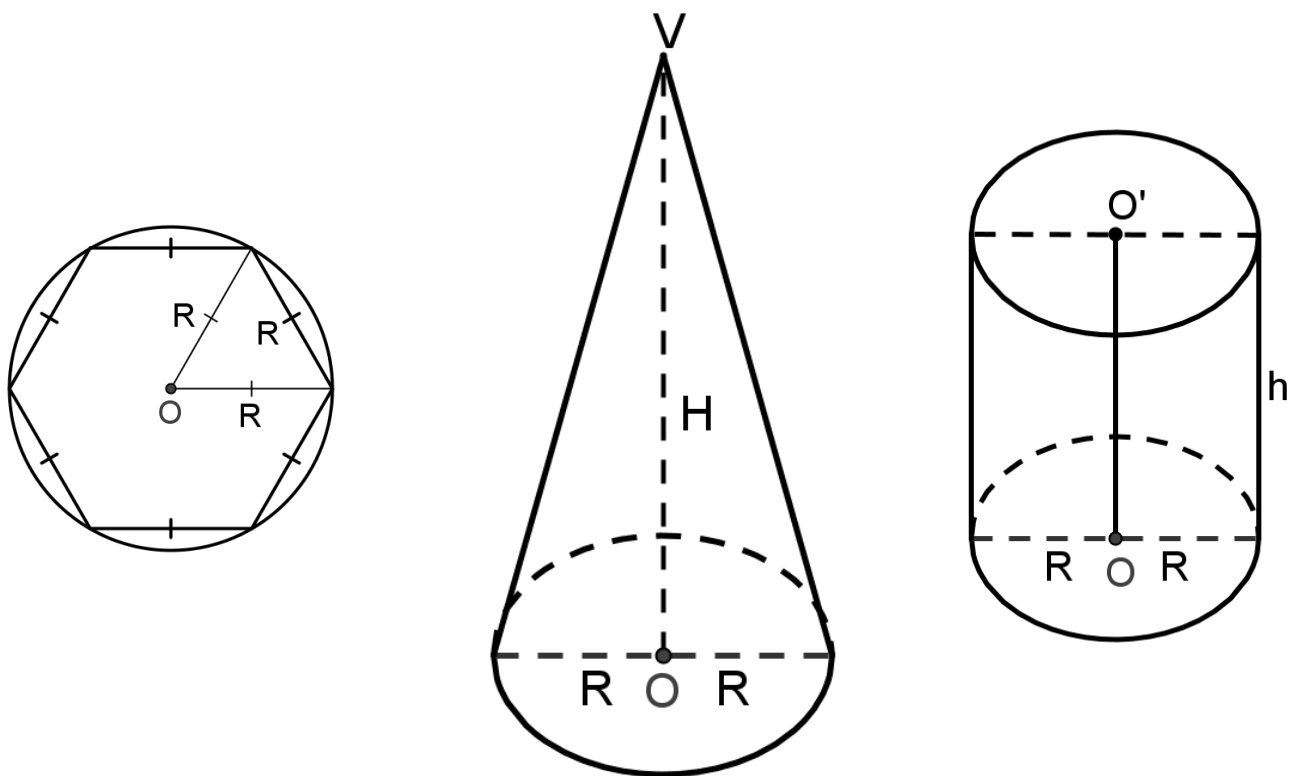
Logo, o volume da esfera de centro O' é:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{3-\sqrt{6}}{6}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{27 - 27\sqrt{6} + 54 - 6\sqrt{6}}{216} = \frac{27 - 11\sqrt{6}}{54}\pi \text{ cm}^3$$

16) Um hexágono regular de lado igual a $8\,\text{cm}$ está inscrito na base de um cone de revolução de volume igual a $128\pi\,\text{cm}^3$. A razão entre a área total do cone e a área total de um cilindro, com o mesmo volume e a mesma base do cone, é de

a) $0,3$
b) $0,6$
c) $0,9$
d) $0,27$
e) $0,36$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Se um hexágono regular de lado 8 cm está inscrito na base de um cone de revolução, então o raio da base do cone é igual a $R = 8\text{ cm}$.

O volume do cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = 128\pi\text{ cm}^3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi \cdot 8^2 \cdot H = 128\pi \Leftrightarrow H = 6\text{ cm}$.

A geratriz g do cone é $g = \sqrt{H^2 + R^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

A área total do cone é $S_{cone} = \pi Rg + \pi R^2 = \pi(8 \cdot 10 + 8^2) = 144\pi\text{ cm}^2$.

O volume do cilindro é dado por: $V = \pi R^2 h = 128\pi\text{ cm}^3 \Leftrightarrow \pi \cdot 8^2 h = 128\pi \Leftrightarrow h = 2\text{ cm}$.

A área total do cilindro é $S_{cilindro} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R(h + R) = 2\pi \cdot 8(2 + 8) = 160\pi\text{ cm}^2$.

A razão entre a área total do cone e a área total de um cilindro é $\frac{S_{cone}}{S_{cilindro}} = \frac{144\pi}{160\pi} = \frac{9}{10} = 0,9$.

17) Se $\{a, b, c\}$ é o conjunto solução da equação $x^3 - 13x^2 + 47x - 60 = 0$, qual o valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

a) 263
b) 240
c) 169
d) 75
e) 26

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Pelas relações de Girard:

$$\sigma_1 = a+b+c = (-1)^1 \cdot \frac{-13}{1} = 13$$

$$\sigma_2 = ab+ac+bc = (-1)^2 \cdot \frac{47}{1} = 47$$

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = 13^2 - 3 \cdot 47 = 75$$

18) Seja p e q números reais, tais que, $p \neq -q$ e $p \cdot q \neq 0$, a expressão $\frac{(p+q)^{-1} \cdot (q^{-2}-p^{-2})}{p^{-2} \cdot q^{-2}}$ é equivalente a:

a) $p^{-1}+q^{-1}$
b) $p \cdot q$
c) $p+q$
d) $p^{-1}+q^{-2} \cdot p$
e) $p-q$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

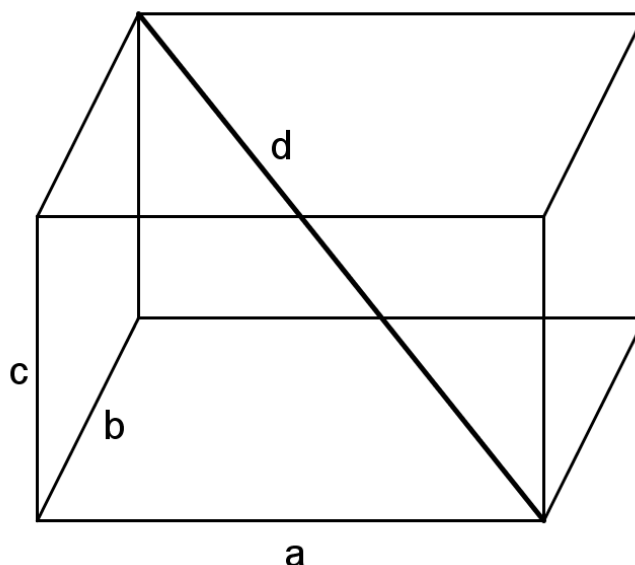
$$\frac{(p+q)^{-1} \cdot (q^{-2}-p^{-2})}{p^{-2} \cdot q^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{p+q}\right) \cdot \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{p^2}\right)}{\frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{q^2}} = p^2 \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{p+q}\right) \cdot \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right) \cdot \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) =$$

$$= p^2 \cdot q^2 \cdot \left(\frac{1}{p+q}\right) \cdot \left(\frac{p+q}{p \cdot q}\right) \cdot \left(\frac{p-q}{p \cdot q}\right) = p-q$$

19) Seja um container, no formato de um paralelepípedo retângulo de dimensões a, b e c, a maior distância entre dois vértices da paralelepípedo é igual a $6\sqrt{5}\ \text{m}$. É correto afirmar que metade de sua área total, em m^2, vale (dado: $a+b+c = 22\ \text{m}$)

a) 120
b) 148
c) 152
d) 188
e) 204

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

A maior distância entre dois vértices do paralelepípedo é a sua diagonal d, então

$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=6\sqrt{5}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=180$

A área total do paralelepípedo é

$S_{total}=2(ab+ac+bc)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=22^2-180=304\ m^2$.

Logo, metade da sua área total é $\frac{S_{total}}{2}=152\ m^2$.

20) Sejam x, y e z números reais positivos onde $x+y=1-z$, e sabendo-se que existem ângulos α e β onde $x=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta$ e $y=\cos^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta$, é correto afirmar que o valor mínimo da expressão $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}-2\sqrt{2}\cdot\frac{z}{x+y}$ é

a) 6

b) $6+2\sqrt{2}$

c) 12

d) $9+2\sqrt{2}$

e) $12+2\sqrt{2}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Lema: Se $a,b\in\mathbb{R}$ e $x,y\in\mathbb{R}_+^*$, então $\frac{(a+b)^2}{x+y}\le\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}$, onde a igualdade ocorre somente quando $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Demonstração:

Seja por absurdo:

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} > \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2)xy > a^2(xy + y^2) + b^2(x^2 + xy)$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy < 0 \Leftrightarrow (ay - bx)^2 < 0 \ \text{(ABSURDO)}$$

Logo, $\frac{(a+b)^2}{x+y} \le \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}$. Note ainda que a igualdade ocorre somente quando $ay - bx = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

No problema em questão, temos:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1^2}{x} + \frac{(\sqrt{2})^2}{y} \ge \frac{(1+\sqrt{2})^2}{x+y} = \frac{3+2\sqrt{2}}{x+y}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{z}{x+y} \ge \frac{3+2\sqrt{2}}{x+y} + \frac{3}{z} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{z}{x+y} = \frac{3}{x+y} + \frac{3}{z} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{1-z}{x+y} = \frac{3}{x+y} + \frac{3}{z} + 2\sqrt{2}$$

$$\frac{3}{z} + \frac{3}{x+y} = \frac{(\sqrt{3})^2}{z} + \frac{(\sqrt{3})^2}{x+y} \ge \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}{x+y+z} = \frac{12}{1} = 12$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{x+y} + \frac{3}{z} + 2\sqrt{2} \ge 12 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} - 2\sqrt{2} \cdot \frac{z}{x+y}\right)_{MIN} = 12 + 2\sqrt{2}$$

Note que o valor mínimo ocorre quando:

$$\frac{\sqrt{3}}{z} = \frac{\sqrt{3}}{x+y} \Leftrightarrow x + y = z = 1 - z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{y} = \frac{1+\sqrt{2}}{x+y} = \frac{1+\sqrt{2}}{1/2} = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \ \text{ e } \ y = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2009/2010

1) Analise as afirmativas abaixo.
I – Seja K o conjunto dos quadriláteros planos, seus subconjuntos são:
$P = \{x \in K \mid x \text{ possui lados opostos paralelos}\}$;
$L = \{x \in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes}\}$;
$R = \{x \in K \mid x \text{ possui 4 ângulos retos}\}$; e
$Q = \{x \in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes e 2 ângulos com medidas iguais}\}$.
Logo, $L \cap R = L \cap Q$.
II – Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, nota-se que A possui somente 4 subconjuntos.
III – Observando as seguintes relações entre conjuntos: $\{a, b, c, d\} \cup Z = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup Z = \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap Z = \{c\}$; pode-se concluir que $Z = \{a, c, e\}$.
Em relação às afirmativas acima, assinale a opção correta:
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
I – FALSA
$L \cap R \neq L \cap Q$, basta notar que losangos pertencem a $L \cap Q$, mas não pertencem a $L \cap R$, no qual só há quadrados.
II – FALSA
A quantidade de subconjuntos de A é $2^4 = 16$.
III – VERDADEIRA

$$\left.\begin{array}{l} \{a,b,c,d\} \cup Z = \{a,b,c,d,e\} \Rightarrow Z \subset \{a,b,c,d,e\} \ \wedge \ e \in Z \\ \{c,d\} \cup Z = \{a,c,d,e\} \Rightarrow Z \subset \{a,c,d,e\} \ \wedge \ a \in Z \ \wedge \ b \notin Z \\ \{b,c,d\} \cap Z = \{c\} \Rightarrow c \in Z \ \wedge \ b \notin Z \ \wedge \ d \notin Z \end{array}\right\} \Rightarrow Z = \{a,c,e\}$$

2) Considere a função real f, definida por $f(x) = -\frac{2}{x}$ e duas circunferências C_1 e C_2, centradas na origem. Sabe-se que C_1 tangencia o gráfico de f, e que um ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ pertence a C_2 e ao gráfico de f. Nessas condições, a área da coroa circular, definida por C_1 e C_2, é igual a

a) $\frac{65}{4}\pi$

b) $\frac{49}{4}\pi$

c) $\frac{25}{4}\pi$

d) $\frac{9}{4}\pi$

e) $\frac{\pi}{4}$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Se C_1 e C_2 são circunferências centradas na origem, então podem ser escritas como $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ e $C_2 : x^2 + y^2 = R^2$, onde $r, R > 0$.

Se o ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ pertence a C_2 e ao gráfico de f, temos:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{(-1/2)} = 4 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 4\right) \in C_2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2 = R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{65}{4}$$

Sabemos que C_1 tangencia o gráfico de f, então

$$f : y = -\frac{2}{x} \text{ e } C_1 : x^2 + y^2 = r^2$$

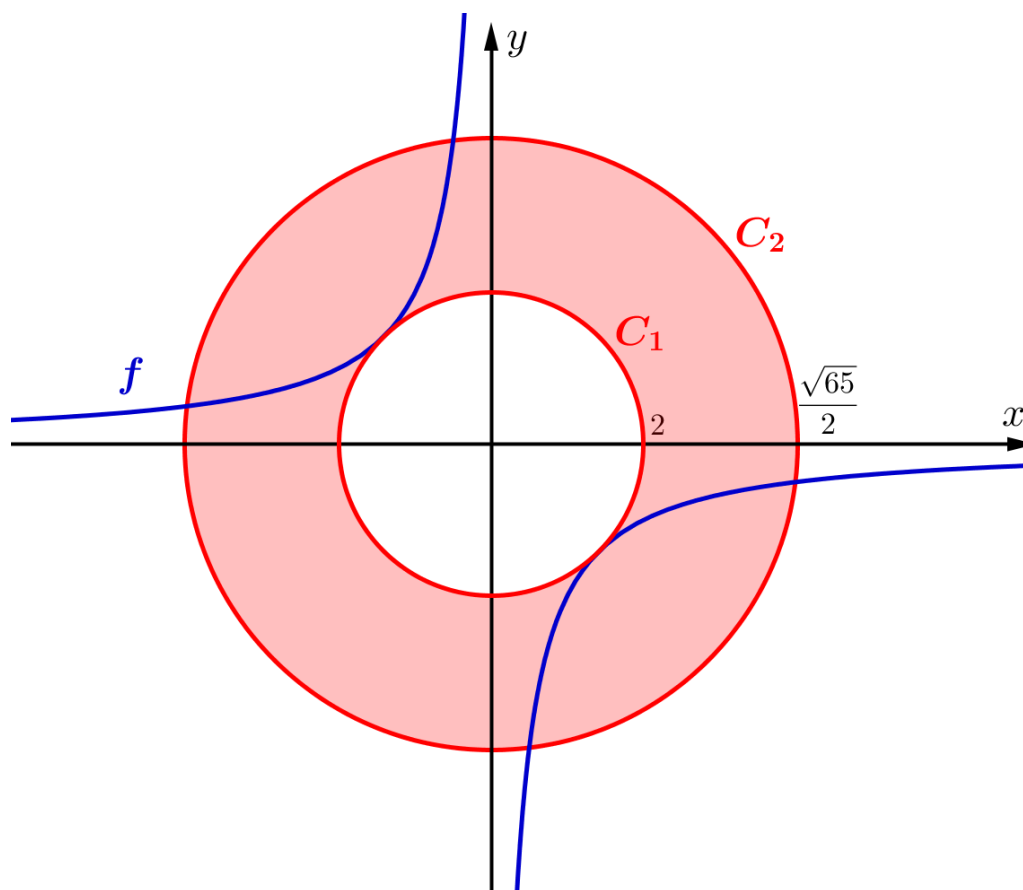
$$x^2 + \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - r^2 = 0 \Leftrightarrow x^4 - r^2x^2 + 4 = 0$$

Para que a circunferência tangencie o gráfico de f (hipérbole), a equação biquadrada deve possuir uma raiz dupla positiva. Assim, o seu discriminante deve ser nulo.

$$\Delta = (-r^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow r^4 = 16 \Leftrightarrow r^2 = 4.$$

Dessa forma, a área da coroa circular, definida por C_1 e C_2, é dada por

$$S_{coroa} = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot \left(\frac{65}{4} - 4\right) = \frac{49}{4}\pi.$$

O gráfico a seguir ilustra a situação descrita pelo problema.

3) Considere a equação de incógnita real x: $2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos 4x$. Se $x_0 \in (0;\pi)$ é uma de suas soluções e x_0 centímetros é a medida da diagonal de um cubo, então a área da superfície total desse cubo, em cm^2, é igual a

a) $\frac{3}{8}\pi^2$

b) $\frac{1}{2}\pi^2$

c) 6

d) $\frac{27}{8}\pi^2$

e) $6\pi^2$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos 4x \Leftrightarrow 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^4 x - 6\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 6\cos^2 x\left(\cos^2 x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \quad \text{ou} \\ \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x_0 \in (0, \pi) \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}$$

Seja um cubo de aresta a, a sua diagonal mede $D = a\sqrt{3}$ e sua área total é $S_T = 6a^2$.

$$D = a\sqrt{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \Rightarrow S_T = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

4) O valor numérico da expressão $\dfrac{\cos\frac{44\pi}{3} - \sec 2400^\circ + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cossec}^2(-780^\circ)}$ é igual a

a) 1

b) $-\frac{3}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{8}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

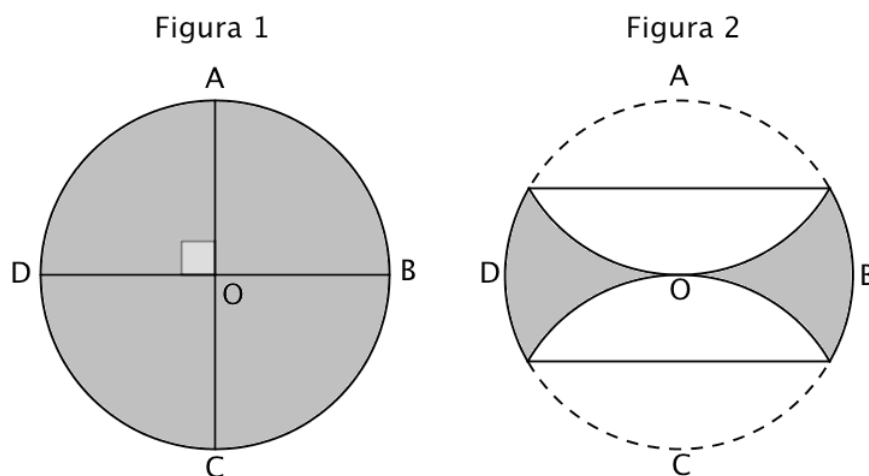
$$\cos\frac{44\pi}{3} = \cos\left(14\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sec 2400^\circ = \sec\left(6 \cdot 360^\circ + 240^\circ\right) = \sec 240^\circ = -\sec 60^\circ = -2$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-10\pi + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\csc\left(-780^\circ\right) = \csc\left(-2 \cdot 360^\circ - 60^\circ\right) = \csc\left(-60^\circ\right) = -\csc 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\cos\frac{44\pi}{3} - \sec 2400^\circ + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cossec}^2\left(-780^\circ\right)} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) - (-2) + (-1)}{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}$$

5) João construiu um círculo de papel com centro O e raio 4cm (Figura 1). Traçou dois diâmetros AC e BD perpendiculares e, em seguida, dobrou o papel fazendo coincidir A, O e C, conforme sugere Figura 2.

A área da parte do círculo não encoberta pelas dobras, sombreada na figura 2, é igual a

a) $\frac{1}{3}(96-16\pi)\text{cm}^2$

b) $\frac{1}{3}(16\pi-48)\text{cm}^2$

c) $\frac{1}{3}\left(16\pi-12\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

d) $\frac{1}{3}\left(16\pi+12\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$

e) $\frac{1}{3}\left(48\sqrt{3}-16\pi\right)\text{cm}^2$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
A corda formada na Figura 2 divide o raio da circunferência ao meio, logo essa corda é igual ao raio do triângulo equilátero inscrito na circunferência.
Dessa foram, a área pedida pode ser obtida retirando-se da área da circunferência, a área de 4 segmentos circulares de 120°.

$$S = S_{CIRC} - 4 \cdot S_{SEG\,120^\circ} = \pi r^2 - 4 \cdot \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2}{2}\text{sen}120^\circ\right) = r^2\left(\pi - \frac{4\pi}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

Como o raio do círculo é r = 4 cm, temos:

$$S = 4^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(48\sqrt{3} - 16\pi\right)\ \text{cm}^2$$

6) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente decrescente, o que significa que para quaisquer x_1 e x_2 reais, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.

I – f é injetora.

II – f pode ser uma função par.

III – Se f possui inversa, então sua inversa é estritamente decrescente.
Assinale a opção correta.
a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
d) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.
e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
I – VERDADEIRA

$$x_1 \neq x_2 \overset{\text{S.P.G.}}{\Rightarrow} x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Logo, a função f é injetora.
II – FALSA

$$-1 < 1 \Rightarrow f(-1) > f(1) \Rightarrow f(-1) \neq f(1)$$

Logo, f não é par.
III – VERDADEIRA

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$$

$$x_1 = f^{-1}(f(x_1)) \text{ e } x_2 = f^{-1}(f(x_2))$$

$$\Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

$$\Rightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow y_1 > y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

Logo, f^{-1} é estritamente decrescente.

7) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $X = A \cdot B$. O determinante da matriz $2 \cdot X^{-1}$ é igual a

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{3}$

c) 1

d) $\frac{8}{3}$

e) 6

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
A e B são matrizes triangulares superiores, logo seus determinantes podem ser calculados através do produto dos elementos da diagonal principal.

$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6$
$\det B = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
A matriz $X = A \cdot B$ é uma matriz de ordem 4 e seu determinante pode ser obtido com o auxílio do Teorema de Binet:
$\det X = \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 6 \cdot 1 = 6$

$$\Rightarrow \det\left(X^{-1}\right) = \frac{1}{\det X} = \frac{1}{6}$$

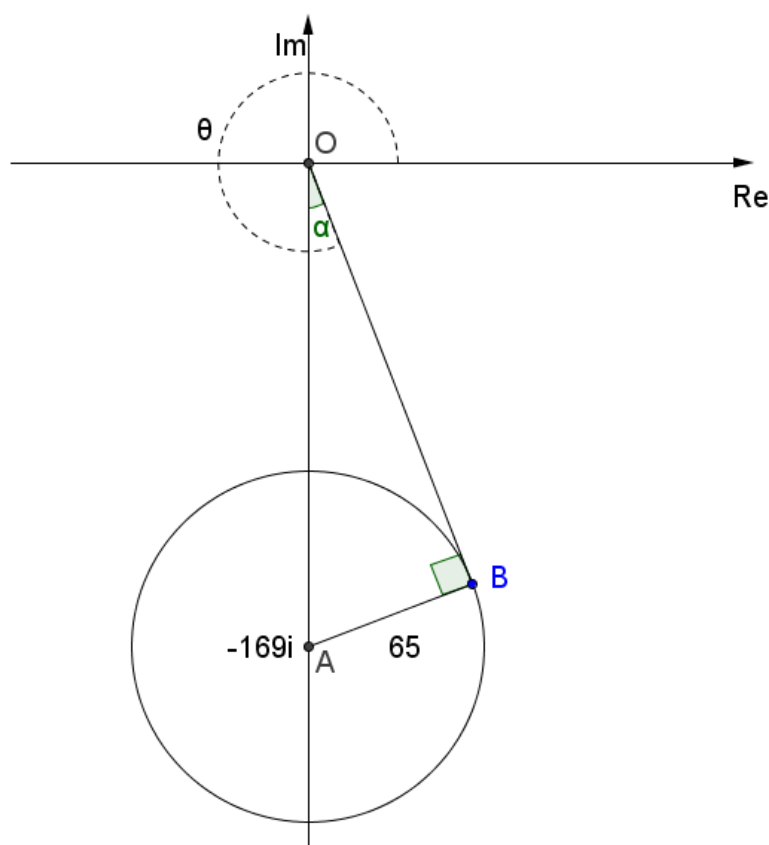
Como X^{-1}, matriz inversa de X, também é de ordem 4, o determinante da matriz $2 \cdot X^{-1}$ é 2^4 vezes o determinante de X^{-1}.

$$\Rightarrow \det\left(2 \cdot X^{-1}\right) = 2^4 \cdot \det\left(X^{-1}\right) = 16 \cdot \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$$

8) Considere o conjunto dos números complexos Z com a propriedade $|Z + 169i| \le 65$, admitindo que i é a unidade imaginária. O elemento desse conjunto que possui o maior argumento θ, $0 \le \theta < 2\pi$, é igual a

a) $60 - 144i$
b) $65 - 169i$
c) $-104i$
d) $-65 - 169i$
e) $65 - 156i$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

$|Z+169i| \le 65 \Leftrightarrow |Z-(-169i)| \le 65$

A expressão acima significa que a distância entre os números complexos Z e o número complexo $-169i$ deve ser menor ou igual a 65, no Plano de Argand-Gauss. Isso é o mesmo que Z pertencer ao interior de um círculo de centro em $-169i$ e raio 65.
Dentre todos os números complexos Z, o de maior argumento é o que está indicado na figura e possui extremidade B.

$AB^2 = 169^2 - 65^2 \Leftrightarrow AB = 156$

$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \text{sen}\alpha = \frac{65}{169} = \frac{5}{13}$

$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha = \frac{156}{169} = -\frac{12}{13}$

$Z_{\text{ARG MAX}} = AB(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = 156\left(\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i\right) = 60 - 144i$

9) A equação $\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}} = 13 + \sqrt{217 - 13\cdot\sqrt[3]{x}}$ tem uma solução positiva x_1. O número de divisores inteiros positivos de x_1 é

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}} = 13 + \sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}} \Leftrightarrow \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4}} = 13 + \sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} - 13 = \sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 26\sqrt[3]{x} + 169 = 217 - 13\sqrt[3]{x} \wedge \sqrt[3]{x} - 13 \ge 0 \wedge 217 - 13\sqrt[3]{x} \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 13\sqrt[3]{x} - 48 = 0 \wedge \sqrt[3]{x} \ge 13 \wedge \sqrt[3]{x} \le \frac{217}{13} \approx 16,7$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{x} = 16 \vee \sqrt[3]{x} = -3\right) \wedge 13 \le \sqrt[3]{x} \le 16,7$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 16 \Leftrightarrow x = 16^3 = \left(2^4\right)^3 = 2^{12}$

Logo, o número de divisores inteiros positivos de $x_1 = 2^{12}$ é $12+1=13$.

10) Sabendo que $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, que opção representa $\log_{10} 2$?

a) $\frac{1-a-b}{2+a}$

b) $\frac{1-a-b}{a-1}$

c) $\frac{1-a-b}{1+a}$

d) $\frac{1-a-b}{2-a}$

e) $\frac{1-a-b}{1-a}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$$\log_{30} 3 = a \Leftrightarrow a = \frac{\log 3}{\log 30} \Leftrightarrow a = \frac{\log 3}{1+\log 3} \Leftrightarrow \log 3 = \frac{a}{1-a}$$

$$\log_{30} 5 = b \Leftrightarrow b = \frac{\log 5}{\log 30} \Leftrightarrow b = \frac{1-\log 2}{1+\log 3} \Leftrightarrow \log 2 = 1-b-b\cdot\log 3$$

$$\Rightarrow \log 2 = 1-b-b\cdot\frac{a}{1-a} = \frac{1-a-b+ab-ab}{1-a} = \frac{1-a-b}{1-a}$$

11) Os pontos $A(-4;10/3)$, $B(-4;0)$, $C(0;0)$ e $D(0;b)$ são vértices de um quadrilátero circunscrito a uma circunferência. A equação da reta AD é representada por

a) $y = \frac{5}{12}x + 5$

b) $y = \frac{4}{3}$

c) $y = \frac{12}{5}x + 1$

d) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

e) $y = \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO: **(O enunciado desta questão foi adaptado, pois a mesma estava incorreta da maneira como foi proposta originalmente)**

Como o quadrilátero ABCD é circunscritível, podemos aplicar o teorema de Pitot. Assim, temos:

$$AB + CD = BC + AD$$

$$AB = \frac{10}{3};\ BC = 4;\ CD = |b|;$$

$$AD = \sqrt{(0-(-4))^2 + \left(b-\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{16+b^2-\frac{20}{3}b+\frac{100}{9}} = \sqrt{b^2-\frac{20}{3}b+\frac{244}{9}}$$

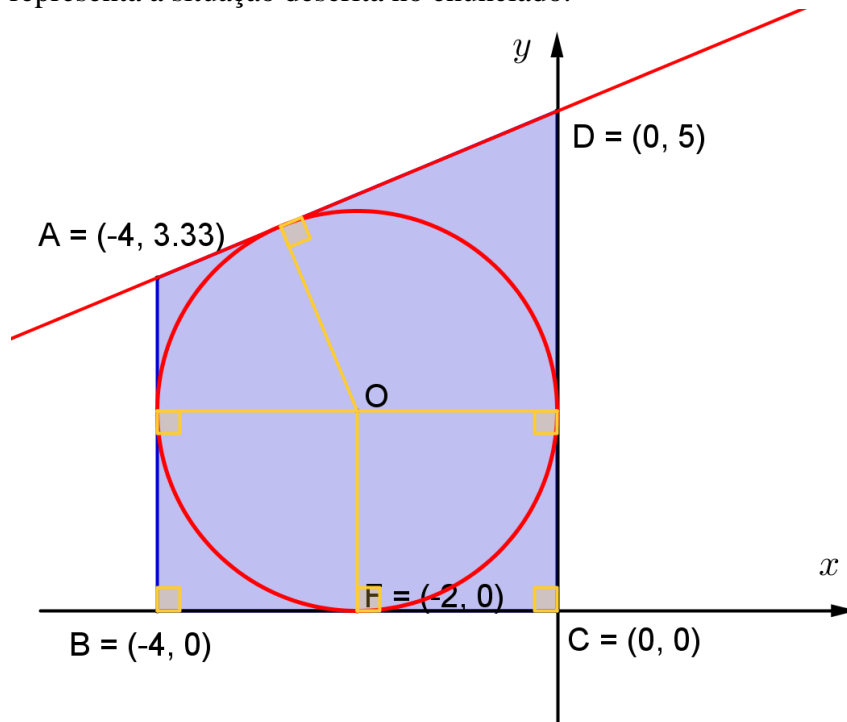
$$AB + CD = BC + AD \Leftrightarrow \frac{10}{3} + |b| = 4 + \sqrt{b^2-\frac{20}{3}b+\frac{244}{9}} \Leftrightarrow \sqrt{b^2-\frac{20}{3}b+\frac{244}{9}} = |b| - \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow b^2 - \frac{20}{3}b + \frac{244}{9} = b^2 - \frac{4}{3}b + \frac{4}{9} \ \wedge\ |b| \geq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3}b = \frac{240}{9} \ \wedge \ |b| \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = 5$$

Portanto, a equação da reta AD é dada por

$$\frac{y-5}{x-0} = \frac{5-\frac{10}{3}}{0-(-4)} \Leftrightarrow \frac{y-5}{x} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow y = \frac{5}{12}x + 5.$$

A figura a seguir representa a situação descrita no enunciado.

12) Sejam ABC e BCD dois triângulos retângulos congruentes, contidos em planos perpendiculares, com hipotenusas $\overline{AC} = \overline{BD} = 8 \text{ m}$ e cateto $\overline{AB} = 4 \text{ m}$. O volume, em m^3, do tetraedro $ABCD$ definido pelos vértices desses triângulos é igual a

a) $16\sqrt{3}$

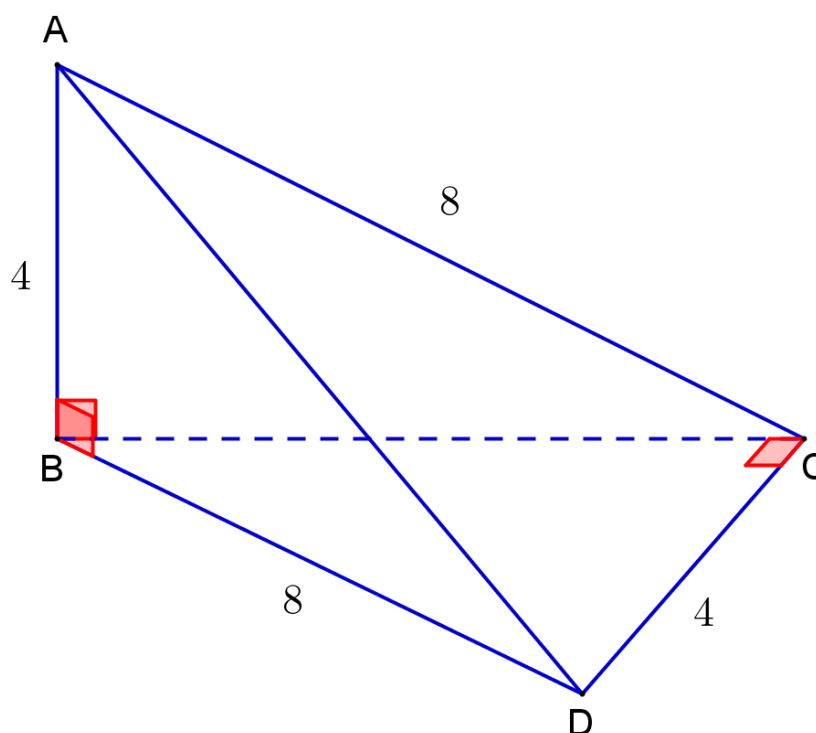
b) $8\sqrt{3}$

c) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

d) $\frac{32}{3}$

e) $\frac{32\sqrt{3}}{3}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BCD, temos:

$BC^2 + 4^2 = 8^2 \Leftrightarrow BC^2 = 48 \Leftrightarrow BC = 4\sqrt{3}$

Como o plano ABC é perpendicular ao plano BCD, então AB é altura do tetraedro ABCD.

Assim, o volume do tetraedro é dado por:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot S_{BCD} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{4 \cdot 4\sqrt{3}}{2} = \frac{32\sqrt{3}}{3}\ m^3$$

13) As medidas dos lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ de um triângulo ABC forma, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente. Os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ desse triângulo possuem a seguinte propriedade: $\text{sen}^2 \hat{A} + \text{sen}^2 \hat{B} - \text{sen}^2 \hat{C} - 2 \cdot \text{sen}\,\hat{A} \cdot \text{sen}\,\hat{B} \cdot \cos \hat{C} = \cos^2 \hat{C}$. Se o perímetro do triângulo ABC mede $3\sqrt{3}$ m, sua área, em m^2, é igual a

a) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{9}{8}$

d) 2

e) 4

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

Lei dos Senos $\dfrac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R \Rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \dfrac{\overline{BC}}{2R}, \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{\overline{AC}}{2R}, \operatorname{sen}\hat{C} = \dfrac{\overline{AB}}{2R}$

$\operatorname{sen}^2\hat{A} + \operatorname{sen}^2\hat{B} - \operatorname{sen}^2\hat{C} - 2\cdot\operatorname{sen}\hat{A}\cdot\operatorname{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = \cos^2\hat{C} \Leftrightarrow$

$\operatorname{sen}^2\hat{A} + \operatorname{sen}^2\hat{B} - 2\cdot\operatorname{sen}\hat{A}\cdot\operatorname{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = \operatorname{sen}^2\hat{C} + \cos^2\hat{C} = 1 \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{\overline{BC}}{2R}\right)^2 + \left(\dfrac{\overline{AC}}{2R}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{\overline{BC}}{2R}\cdot\dfrac{\overline{AC}}{2R}\cdot\cos\hat{C} = 1 \Leftrightarrow$

$\left(\overline{BC}\right)^2 + \left(\overline{AC}\right)^2 - 2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\hat{C} = 4R^2$

A expressão do lado esquerdo é a Lei dos Cossenos, então:

$\left(\overline{AB}\right)^2 = 4R^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = 2R$

Como $\overline{AB} = 2R$, o triângulo ABC é retângulo de hipotenusa $\overline{AB}$.

$$\text{PA}: \overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AC} = \sqrt{3} - k \\ \overline{BC} = \sqrt{3} \\ \overline{AB} = \sqrt{3} + k \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{3} - k\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3} + k\right)^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cdot 2k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

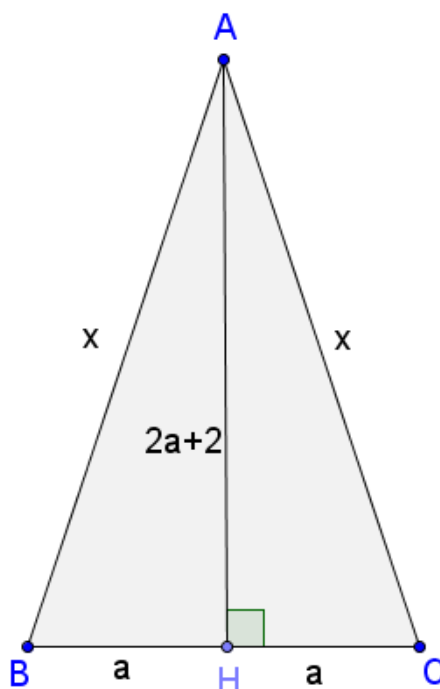
$\Rightarrow \overline{AC} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}, \overline{BC} = \sqrt{3}, \overline{AB} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

Logo, a área do triângulo é $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3} = \dfrac{9}{8}\text{ m}^2$.

14) Um triângulo isósceles ABC, com lados $AB = AC$ e base BC, possui a medida da altura relativa à base igual à medida da base acrescida de 2 metros. Sabendo que o perímetro do triângulo é igual a 36 metros, pode-se afirmar que sua base mede

a) 8 metros.
b) 9 metros.
c) 10 metros.
d) 11 metros.
e) 12 metros.

RESPOSTA: c

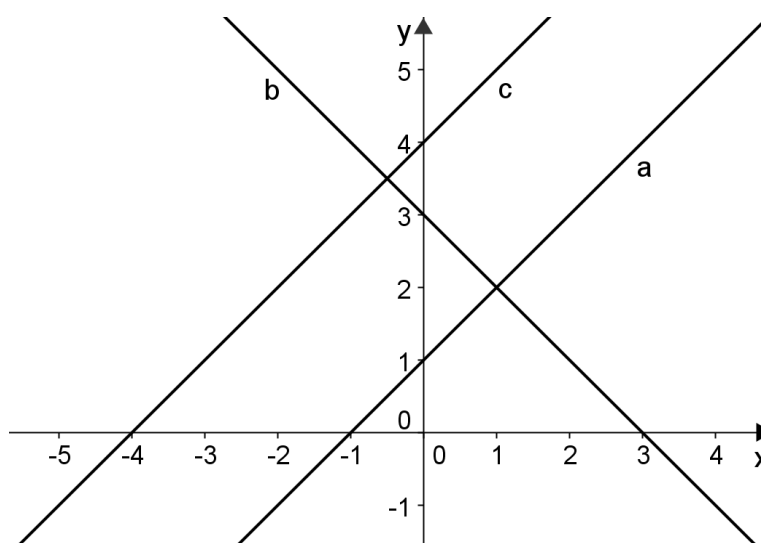
RESOLUÇÃO:
Seja $BC = 2a$, pode-se construir a figura abaixo.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no ΔABH: $x^2 = (2a+2)^2 + a^2 = 5a^2 + 8a + 4$

$2p(ABC) = 2a + 2x = 2a + 2\sqrt{5a^2 + 8a + 4} = 36$

$\Leftrightarrow \sqrt{5a^2 + 8a + 4} = 18 - a \Leftrightarrow 5a^2 + 8a + 4 = (18 - a)^2 \wedge 18 - a \geq 0$

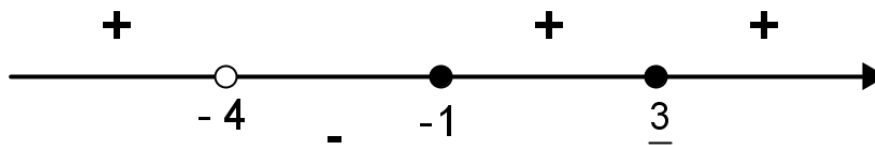
$\Leftrightarrow a^2 + 11a - 80 = 0 \wedge a \leq 18 \Leftrightarrow (a = -16 \vee a = 5) \wedge a \leq 18 \Rightarrow a = 5$

A base do triângulo é $BC = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}$

15) O gráfico das três funções polinomiais do 1° grau a, b e c definidas, respectivamente, por $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$, estão representadas abaixo.

Nessas condições, o conjunto solução da inequação $\frac{(a(x))^5 \cdot (b(x))^6}{(c(x))^3} \geq 0$ é

a) $(-4;-1) \cup [3;+\infty)$
b) $[-4;-1] \cup [3;+\infty)$
c) $(-\infty;-4) \cup [-1;+\infty)$
d) $[4;+\infty)$
e) $\mathbb{R} - \{4\}$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
A raiz de $a(x)$ é -1, a raiz de $b(x)$ é 3 e raiz de $c(x)$ é -4.
Na fração $\frac{(a(x))^5 \cdot (b(x))^6}{(c(x))^3}$, -1 é raiz de multiplicidade 5, 3 é raiz de multiplicidade 6 e -4 é um ponto de descontinuidade de multiplicidade 3. Assim, 3 é um ponto duplo e os outros dois são pontos simples.

Escolhendo os intervalos de sinais maiores ou iguais a zero, temos $S = (-\infty, -4) \cup [-1, +\infty)$.

16) Um triângulo obtusângulo ABC tem 18 cm de perímetro e as medidas de seus lados formam uma progressão aritmética crescente $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC})$. Os raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo ABC medem, respectivamente, r e R. Se $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{sen}\,\hat{B} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$, então o produto $r \cdot R$, em cm^2, é igual a

a) $\frac{35}{9}$
b) $6\sqrt{6}$
c) $3\sqrt{15}$
d) $\frac{16}{3}$
e) 1

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$PA: \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = 6-k \\ \overline{AC} = 6 \\ \overline{BC} = 6+k \end{cases}$$

Lei dos Senos:

$$\frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R \Leftrightarrow \frac{6+k}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{6}{\frac{3\sqrt{15}}{16}} = \frac{6-k}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R \Rightarrow k = 2 \ \wedge \ R = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

$$S = p \cdot r = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} \operatorname{sen}\hat{A} \Leftrightarrow 9 \cdot r = \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\Rightarrow r \cdot R = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot \frac{16}{\sqrt{15}} = \frac{16}{3}$$

17) Seja f uma função de domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{a\}$. Sabe-se que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $0 < |x-a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.

I – Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$, logo, $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

II – Na função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, tem-se $\lim_{x \to 1} f(x) = -3$.

III – Sejam f e g funções quaisquer, pode-se afirmar que $\lim_{x \to a} (f \cdot g)^n (x) = (L \cdot M)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$.

Assinale a opção correta.

a) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
b) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
e) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

I – FALSA

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x-2) = 1 - 2 = -1$$

Note que o limite quando x tende a 1 é calculado para valores em uma vizinhança reduzida de 1, ou seja, que não inclui o número 1.

II – FALSA

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2-4) = 1^2-4=-3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3-x) = 3-1=2\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \neq -3 = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

III – VERDADEIRA

O produto dos limites é igual ao limite do produto.

18) A expressão $6\cdot n+n^2$ representa a soma dos n primeiros termos de uma sequência numérica. É correto afirmar que essa sequência é uma progressão

a) aritmética de razão 3.
b) aritmética de razão 4.
c) aritmética de razão 2.
d) geométrica de razão 4.
e) geométrica de razão 2.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\left.\begin{array}{l}S_n = 6n+n^2 \\ S_{n-1} = 6(n-1)+(n-1)^2 = n^2+4n-5\end{array}\right\} \Rightarrow a_n = S_n - S_{n-1} = (6n+n^2)-(n^2+4n-5) = 2n+5$$

$$\Rightarrow a_n = 7+2(n-1)$$

Logo, a sequência é uma progressão aritmética de primeiro termo 7 e razão 2.

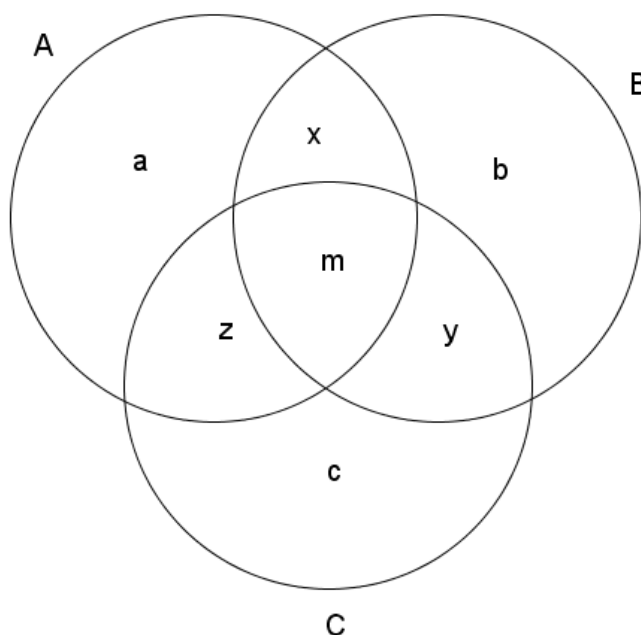
19) Se X é um conjunto com um número finito de elementos, $n(X)$ representa o número de elementos do conjunto X. Considere os conjuntos A, B e C com as seguintes propriedades:

- $n(A\cup B\cup C)=25$;
- $n(A-C)=13$;
- $n(B-A)=10$;
- $n(A\cap C)=n(C-(A\cup B))$.

O maior valor possível de $n(C)$ é igual a

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
Representando os conjuntos A, B e C no diagrama de Venn-Euler, temos:

$n(A \cup B \cup C) = 25 \Leftrightarrow a + b + c + x + y + z + m = 25$

$n(A - C) = 13 \Leftrightarrow a + x = 13$

$n(B - A) = 10 \Leftrightarrow b + y = 10$

$n(A \cap C) = n(C - (A \cup B)) \Leftrightarrow m + z = c$

$m + z + c = (a + b + c + x + y + z + m) - (a + x) - (b + y) = 25 - 13 - 10 = 2$

$\Rightarrow c + c = 2 \Leftrightarrow c = m + z = 1$

$n(C) = c + m + z + y = 2 + y$

$b + y = 10 \Rightarrow y \leq 10 \Rightarrow n(C)_{MAX} = 2 + 10 = 12$

20) Um recipiente tem a forma de um paralelepípedo retângulo com altura h e base quadrada. Ele está com uma certa quantidade de água até uma altura h_1. Duas esferas, ambas com diâmetros iguais a 2 dm, forma colocadas dentro do recipiente, ficando esse recipiente com o nível de água até a borda (altura h). Considerando que o volume do paralelepípedo retângulo é de 40 litros, pode-se afirmar que a razão $\frac{h_1}{h}$, utilizando $\pi = 3$, vale:

a) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{5}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:
Seja S a área da base do paralelepípedo em dm^2, então: $V = S \cdot h = 40\ell$
Como as esferas têm raio 1 dm, temos:

$$S \cdot h_1 + 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot 1^3 = S \cdot h \Leftrightarrow S(h - h_1) = \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{40}{h} \cdot (h - h_1) = \frac{8\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 40 - 40 \cdot \frac{h_1}{h} = \frac{8\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{h_1}{h} = 1 - \frac{\pi}{15} \approx 1 - \frac{3}{15} = \frac{4}{5}$$

PROVA DE MATEMÁTICA – EFOMM – 2008/2009

1) Qual é o número inteiro cujo produto por 9 é um número natural composto apenas pelo algarismo 1?
a) 123459
b) 1234569
c) 12345679
d) 12345789
e) 123456789

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Analisando o produto dos dois últimos algarismos do número em cada uma das alternativas por 9, temos:
$59 \times 9 = 531 \Rightarrow$ o número termina em 31
$69 \times 9 = 621 \Rightarrow$ o número termina em 21
$89 \times 9 = 801 \Rightarrow$ o número termina em 01
$79 \times 9 = 711 \Rightarrow$ o número termina em 11
Fazendo o produto do número completo da alternativa c) por 9, temos:
$12345679 \times 9 = 111111111$

2) O logotipo de uma certa Organização Militar é uma pedra semipreciosa, cujo valor é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa em gramas. Suponha que a pedra de 8 gramas, infelizmente, tenha caído partindo-se em dois pedaços. Qual é o prejuízo, em relação ao valor inicial, sabendo-se que foi o maior possível?
a) 18%
b) 20%
c) 50%
d) 80%
e) 90%

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
O valor inicial da pedra de 8 gramas era $8^2 = 64$ reais. Supondo que a pedra tenha se partido em duas partes de peso x e $(8-x)$ gramas, então o valor dos dois pedaços é $x^2 + (8-x)^2 = 2x^2 - 16x + 64$.
O prejuízo em relação ao valor inicial é $P(x) = 64 - \left(2x^2 - 16x + 64\right) = -2x^2 + 16x$.
O prejuízo é máximo no vértice da função quadrática, ou seja, em $x_V = \frac{-16}{2 \cdot (-2)} = 4$ e $y_V = P(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32$.
Assim, o prejuízo máximo em relação ao valor inicial é $\frac{64-32}{64} \cdot 100\% = 50\%$.

3) Numa embarcação é comum ouvirem-se determinados tipos de sons. Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um desses sons estejam relacionados com a equação logarítmica $\beta = 12 + \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I em watts por metro quadrado. Qual é a razão $\frac{I_1}{I_2}$, sabendo que I_1 corresponde ao ruído sonoro de 8 decibéis de uma aproximação de dois navios e que I_2 corresponde a 6 decibéis no interior da embarcação?

a) 0,1
b) 1
c) 10
d) 100
e) 1000

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:

$$8 = 12 + \log_{10} I_1 \Leftrightarrow \log_{10} I_1 = -4 \Leftrightarrow I_1 = 10^{-4}$$

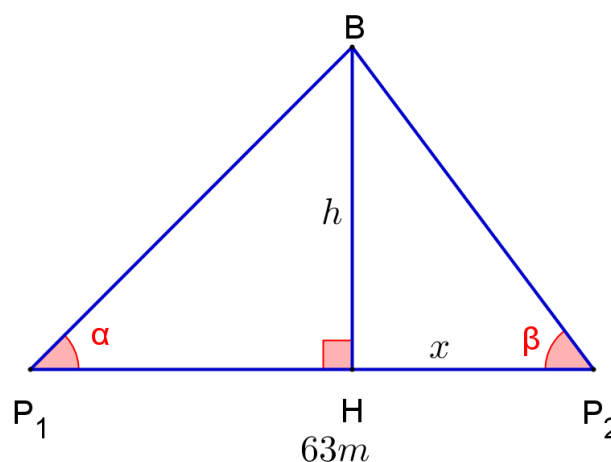
$$6 = 12 + \log_{10} I_2 \Leftrightarrow \log_{10} I_2 = -6 \Leftrightarrow I_2 = 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-4}}{10^{-6}} = 10^{-4-(-6)} = 10^2 = 100$$

4) Duas pessoas estão na beira da praia e conseguem ver uma lancha B na água. Adotando a distância entre as pessoas como $\overline{P_1P_2}$ sendo 63 metros, o ângulo $B\hat{P}_1P_2 = \alpha$, $B\hat{P}_2P_1 = \beta$, $\text{tg}\alpha = 2$ e $\text{tg}\beta = 4$. A distância da lancha até a praia vale

a) 83
b) 84
c) 85
d) 86
e) 87

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Projetando B sobre $\overline{P_1P_2}$, obtemos o ponto H.

Fazendo $BH = h$ e $P_2H = x$, então $P_1H = 63 - x$.

$$\text{tg}\beta = \frac{BH}{P_2H} \Leftrightarrow \frac{h}{x} = 4 \Leftrightarrow h = 4x$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{BH}{P_1H} \Leftrightarrow \frac{h}{63-x} = 2 \Leftrightarrow 4x = 126 - 2x \Leftrightarrow x = 21 \text{ e } h = 84$$

Logo, a distância da lancha até a praia é de 84 m.

5) Tem-se um contêiner no formato cúbico, onde o ponto P descreve o centro desse contêiner e o quadrado ABCD a parte superior dele. Considerando-se o ΔAPC, o seno do ângulo $A\hat{P}C$ vale

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

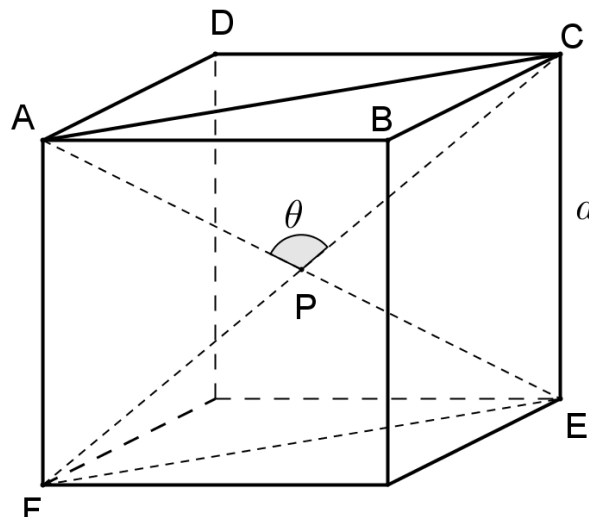
b) $\frac{2\sqrt{2}}{2}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

RESPOSTA: a

RESOLUÇÃO:

Seja o contêiner um cubo de aresta a, então

O segmento AC é a diagonal do quadrado ABCD de lado a, então $AC = a\sqrt{2}$.

Os segmentos AP e CP são metade da diagonal do cubo, então $AP = CP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

A área do triângulo APC é $\frac{1}{4}$ da área do retângulo ACEF, então temos:

$$S_{APC}=\frac{1}{4}\cdot S_{ACEF}\Leftrightarrow\frac{AP\cdot CP}{2}\cdot\text{sen}\,\theta=AC\cdot CE\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\text{sen}\,\theta=\frac{1}{4}\cdot a\sqrt{2}\cdot a\Leftrightarrow\text{sen}\,\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

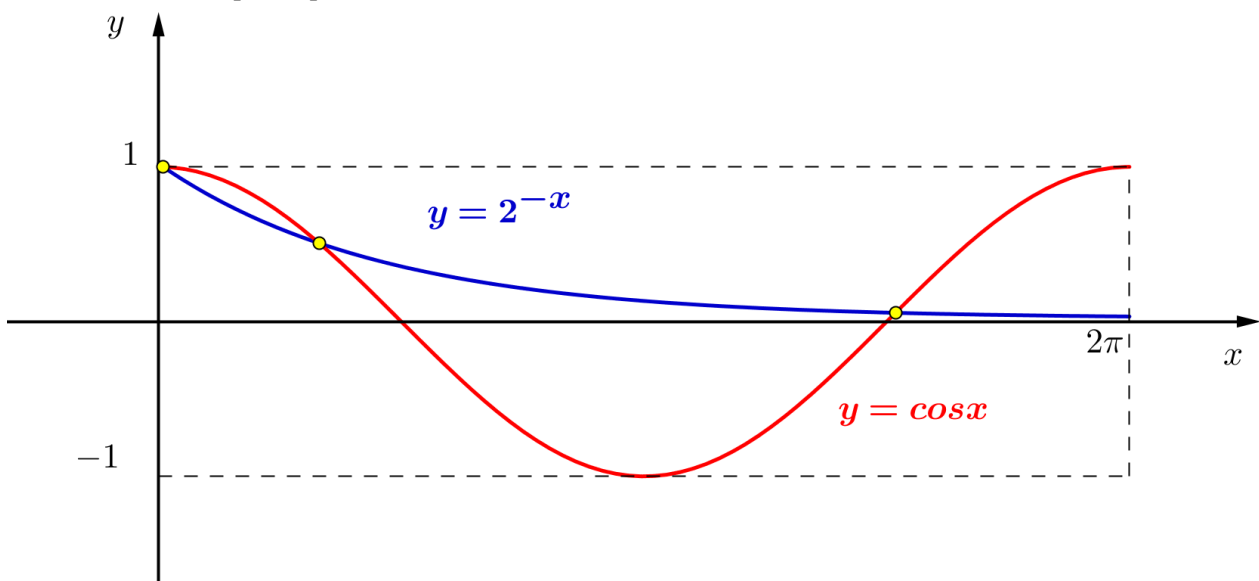
6) A equação $2^{-x}+\cos(\pi-x)=0$ tem quantas raízes no intervalo $[0, 2\pi]$?
a) zero.
b) uma.
c) duas.
d) três.
e) quatro.

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
$\cos(\pi-x)=-\cos x$
$2^{-x}+\cos(\pi-x)=0\Leftrightarrow 2^{-x}-\cos x=0\Leftrightarrow 2^{-x}=\cos x$

Observe que a função $y=2^{-x}$ é estritamente decrescente e varia de $2^{-0}=1$ a $2^{-2\pi}=\frac{1}{2^{2\pi}}\approx 0,01$.

No intervalo $[0, 2\pi]$, a função $y=\cos x$ decresce de 1 até -1 e depois cresce até 1.

Dessa forma, os gráficos têm 3 interseções e, consequentemente, a equação $2^{-x}=\cos x$ possui três raízes no intervalo $[0, 2\pi]$.

7) Considerando-se a função clássica $f(x)=\text{arcsen}\,x$ e a sua inversa $g(x)=f^{-1}(x)$, é correto afirmar que os gráficos de $f\circ g$ e $g\circ f$ são
a) iguais.
b) diferentes, mas o de $f\circ g$ está contido no de $g\circ f$.
c) diferentes, mas o de $g\circ f$ está contido no de $f\circ g$.
d) diferentes e de intersecção com um número finito de pontos.
e) diferentes e de intersecção vazia.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

A função $f(x) = \text{arcsen}\, x$ tem domínio $D_f = [-1,1]$ e imagem $\text{Im}_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

A função $g(x) = f^{-1}(x)$ tem domínio $D_g = \text{Im}_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e imagem $\text{Im}_g = D_f = [-1,1]$.

A função $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$ tem domínio e imagem iguais ao domínio de g, ou seja, $D_{f \circ g} = \text{Im}_{f \circ g} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

A função $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ tem domínio e imagem iguais ao domínio de f, ou seja, $D_{g \circ f} = \text{Im}_{g \circ f} = [-1,1]$.

Portanto, as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ são ambas iguais a x, mas os seus domínios são diferentes.

Como $D_{g \circ f} = D_{f \circ g}$, então os gráficos $f \circ g$ e $g \circ f$ são diferentes, mas o de $g \circ f$ está contido no de $f \circ g$.

8) Após a determinação dos valões numéricos de $p(-1)$, $p(0)$ e $p(1)$, verifica-se que o polinômio $p(x) = x^3 + x^2 - x - 0,5$ tem

a) apenas uma raiz real.
b) apenas duas raízes reais.
c) três raízes reais, todas do mesmo sinal.
d) três raízes reais, duas positivas e uma negativa.
e) três raízes reais, duas negativas e uma positiva.

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$p(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 0,5 = 0,5 > 0$

$p(0) = 0^3 + 0^2 - 0 - 0,5 = -0,5 < 0$

$p(1) = 1^3 + 1^2 - 1 - 0,5 = 0,5 > 0$

Como $p(-1) \cdot p(0) < 0$, então, pelo teorema de Bolzano, existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $]-1,0[$.

Como $p(0) \cdot p(1) < 0$, então, pelo teorema de Bolzano, existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $]0,1[$.

Como o polinômio tende a $-\infty$, quando x tende a $-\infty$, e $p(-1) > 0$, então existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $]-\infty,-1[$.

Como o polinômio é de grau 3 e, consequentemente, possui no máximo 3 raízes reais, então, em cada um dos intervalos citados, há exatamente uma raiz.

Portanto, o polinômio possui três raízes reais duas negativas e uma positiva.

O gráfico a seguir representa a situação descrita no problema.

9) Dado o sistema de equações lineares $S:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$. Sabendo-se que os determinantes $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$ são todos iguais a zero, apenas pode-se concluir que S

a) é determinado.
b) não é determinado.
c) admite a solução $(0,0,0)$.
d) não é impossível.
e) não é indeterminado.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

Se o determinante da matriz incompleta do sistema $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ é nulo, então o sistema não é determinado.

O sistema $S:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$ é um exemplo para o qual o sistema é impossível.

O sistema $S:\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ é um exemplo para o qual o sistema é possível e indeterminado.

Note que o sistema acima também não admite a solução $(0,0,0)$.

10) A, B e C são pontos consecutivos no sentido anti-horário de uma circunferência de raio r. O menor arco AB tem comprimento igual a r. Tomando-se como unidade u a medida do ângulo agudo $A\hat{C}B$, qual é o valor do seno de $\frac{\pi}{6}u$?

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

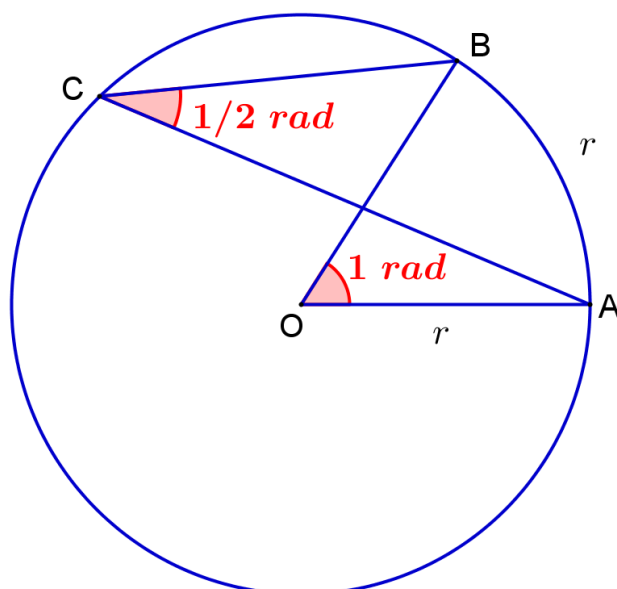
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:

$\text{med}(AB) = r \Leftrightarrow AB = 1\,\text{rad}$

O ângulo $A\hat{C}B$ é um ângulo inscrito na circunferência, então $A\hat{C}B = \frac{AB}{2} = \frac{1}{2}\,\text{rad} = u$.

$$\text{sen}\frac{\pi}{6}\text{u}=\text{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\text{rad}=\text{sen}\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

11) A progressão geométrica $(x-3, x+1, \ldots)$ de termos reais não nulos admite um limite para a soma dos seus infinitos termos se, e somente se,

a) $x>1$
b) $x<1$
c) $x>3$
d) $x<3$
e) $1<x<3$

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:

$|q|<1 \Leftrightarrow -1<q<1 \Leftrightarrow -1<\frac{x+1}{x-3}<1$

$\frac{x+1}{x-3}>-1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3}+1>0 \Leftrightarrow \frac{2x-2}{x-3}>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>3$

$\frac{x+1}{x-3}<1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3}-1<0 \Leftrightarrow \frac{4}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0 \Leftrightarrow x<3$

Fazendo a interseção dos dois intervalos, temos $x<1$.

12) Sabendo-se que duas circunferências secantes são ortogonais quando as respectivas retas tangentes nos seus pontos de interseção são perpendiculares, qual é a equação da circunferência centrada em $(3,5)$ que é ortogonal à circunferência $x^2+y^2-6x-7=0$?

a) $x^2+y^2-6x-10y+20=0$
b) $x^2+y^2-6x-10y+24=0$
c) $x^2+y^2-6x-10y+25=0$
d) $x^2+y^2-6x-10y+28=0$
e) $x^2+y^2-6x-10y+30=0$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

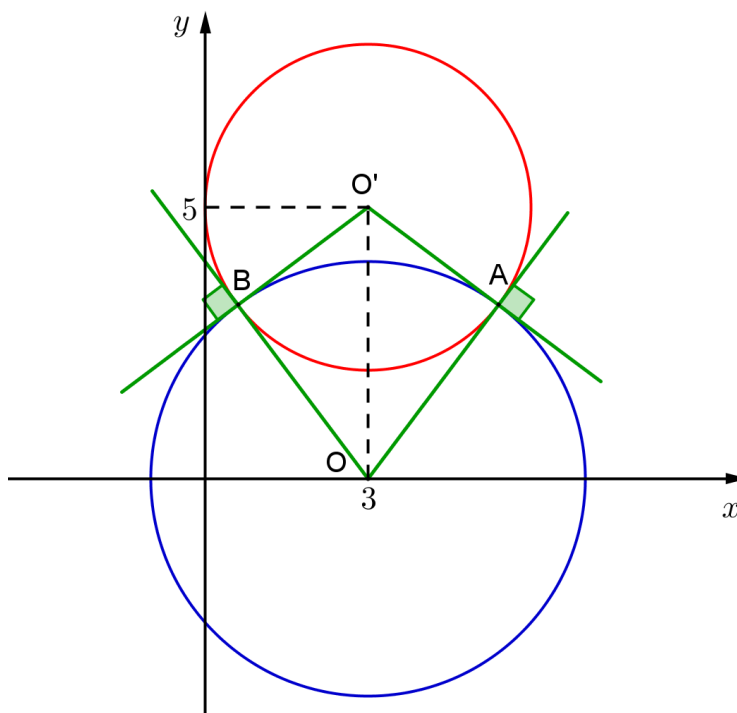
Se as tangentes são perpendiculares no ponto de interseção, os raios que se encontram no ponto de interseção também são perpendiculares.

Assim, o triângulo formado pelo segmento que une o centro das duas circunferências e os dois raios é retângulo.

$x^2+y^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2=7+9 \Leftrightarrow (x-3)^2+y^2=16$

Logo, o centro da circunferência é $O(3,0)$ e raio é 4.

A distância entre os centros é $\sqrt{(3-3)^2+(5-0)^2}=5$.

Sendo r o raio da segunda circunferência, pelo teorema de Pitágoras, temos: $r^2+4^2=5^2 \Leftrightarrow r=3$.
Assim, a equação da circunferência centrada em $(3,5)$ e ortogonal à circunferência inicial é dada por
$(x-3)^2+(y-5)^2=r^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-5)^2=3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2-6x-10y+25=0$.
A figura a seguir ilustra a situação descrita pelo problema.

13) Em uma progressão aritmética cujo número de termos é ímpar a soma dos termos de ordem ímpar é 573, e a soma dos termos de ordem par é 549. Quanto vale a soma de dois termos equidistantes dos extremos dessa progressão?
a) 12
b) 24
c) 48
d) 56
e) 68

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:
Supondo que a PA possua $2n+1$ termos, teremos $(n+1)$ termos de ordem ímpar e n termos de ordem par, assim:

$$\frac{(a_1+a_{2n+1})\cdot(n+1)}{2}=573$$

$$\frac{(a_2+a_{2n})\cdot n}{2}=549$$

A soma de dois termos equidistantes dos extremos é sempre a mesma. Assim, seja $S=a_1+a_{2n+1}=a_2+a_{2n}$, temos:

$$\begin{cases} S\cdot(n+1)=1146 \\ S\cdot n=1098 \end{cases} \Leftrightarrow S=48$$

14) Dois dos lados de um hexágono regular estão contidos nas retas definidas pelas equações $4x+3y+28=0$ e $8x+6y+15=0$, respectivamente. A área desse hexágono é um número entre

a) 13 e 14
b) 14 e 15
c) 15 e 16
d) 16 e 17
e) 17 e 18

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Observando que as retas são paralelas conclui-se que são retas suporte de lados opostos do hexágono. Tomando um ponto sobre uma das retas e calculando a sua distância à outra reta, o resultado é igual ao dobro da altura do triângulo equilátero que forma o hexágono.
Seja o ponto $P(-7,0)$ sobre a reta $r: 4x+3y+28=0$ e sendo $s: 8x+6y+15=0$, então temos:

$$d(P,s)=\frac{|8\cdot(-7)+6\cdot 0+15|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{41}{10}$$

Seja o hexágono formado por seis triângulos equiláteros de lado L, então

$$d(P,s)=\frac{41}{10}=2\cdot\frac{L\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow L=\frac{41}{10\sqrt{3}}.$$

A área do hexágono é dada por $S_{hex}=6\cdot S_{\Delta}=6\cdot\frac{L^2\sqrt{3}}{4}=\frac{6\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{41^2}{10^2\cdot 3}\approx 14,6$ que está entre 14 e 15.

15) Qual é o menor valor do número natural positivo n para que $(\sqrt{3}+i)^n$, onde i é a unidade imaginária, seja um número real?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Inicialmente, vamos escrever o número complexo $\sqrt{3}+i$ na forma trigonométrica.

$$\sqrt{3}+i=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\text{cis}\,\frac{\pi}{6}$$

Pela 1^a fórmula de De Moivre, temos:

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n=\left(\frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n=\frac{1}{2^n}\operatorname{cis}\frac{n\pi}{6}=\frac{1}{2^n}\left(\cos\frac{n\pi}{6}+i\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}\right)$$

Para que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ seja um número real, devemos ter $\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}=0$. O menor valor positivo para o qual isso ocorre é $n=6$.

16) Se o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ é 5, então $\begin{vmatrix} a & a+b & 3c \\ d & d+e & 3f \\ g & g+h & 3i \end{vmatrix}$ é igual a

a) zero
b) cinco.
c) quinze.
d) trinta.
e) quarenta e cinco.

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} a & a+b & 3c \\ d & d+e & 3f \\ g & g+h & 3i \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} a & a+b & c \\ d & d+e & f \\ g & g+h & i \end{vmatrix}\overset{(*)}{=}3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=3\cdot 5=15$$

(*) A segunda coluna foi substituída pela diferença entre a segunda coluna e a primeira coluna. Pelo teorema de Jacobi, essa operação não altera o determinante.

17) Os domínios das funções reais $f(x)=\log x^2$ e $g(x)=2\cdot\log x$ são D_1 e D_2, respectivamente. Sendo assim, pode-se afirma que

a) $D_1=D_2$
b) $D_1\neq D_2$, mas $D_1\subset D_2$.
c) $D_1\neq D_2$, mas $D_2\subset D_1$.
d) $D_1\neq D_2$ e $D_1\cap D_2=\varnothing$
e) $D_1\not\subset D_2$, $D_2\not\subset D_1$ e $D_1\cap D_2=\varnothing$

RESPOSTA: c

RESOLUÇÃO:

O domínio de $f(x)=\log x^2$ é tal que $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$, então $D_1=\mathbb{R}^*$.

O domínio de $g(x)=2\cdot\log x$ é tal que $x>0$, então $D_2=\mathbb{R}_+^*$.

Portanto, $D_1\neq D_2$, mas $D_2\subset D_1$.

18) Todos os anos uma fábrica aumenta a produção em uma quantidade constante. No 5º ano de funcionamento, ela produziu 1460 peças, e no 8º ano, 1940. Quantas peças, então, ela produziu no 1º ano de funcionamento?
a) 475
b) 520
c) 598
d) 621
e) 820

RESPOSTA: e

RESOLUÇÃO:
Se a produção aumenta todos os anos em uma quantidade constante, então a quantidade de peças produzidas por ano é uma progressão aritmética.
Seja a_n a quantidade de peças produzidas no n-ésimo ano de funcionamento e r a razão da progressão aritmética, então
$a_5 = 1460$
$a_8 = 1940$
$a_8 = a_5 + r \cdot (8-5) \Leftrightarrow 1940 = 1460 + 3 \cdot r \Leftrightarrow r = 160$
A quantidade de peças produzidas no primeiro ano de funcionamento a_1 é dada por
$a_5 = a_1 + r \cdot (5-1) \Leftrightarrow 1460 = a_1 + 160 \cdot 4 \Leftrightarrow a_1 = 820$.

19) Na construção de um prédio, para levar água da cisterna até a caixa superior, foram usados canos de ferro de duas polegadas. Considerando os seguintes dados abaixo, qual a massa aproximada de cada um desses canos? Use $\pi = 3,14$.
Comprimento de um cano: 6 m
Diâmetro externo: 5 cm
Diâmetro interno: 4,4 cm
Densidade do ferro: $7,8 \text{ g}/\text{cm}^3$
a) 16.720 g
b) 17.750 g
c) 18.920 g
d) 20.720 g
e) 21.550 g

RESPOSTA: d

RESOLUÇÃO:
O cano é uma casca cilíndrica. O seu volume pode ser calculado pelo produto da área da base, que é uma coroa circular, pela sua altura.
A área da base é a área de uma coroa circular, onde $R = \frac{5}{2} = 2,5$ e $r = \frac{4,4}{2} = 2,2$. Assim, temos:
$S_{base} = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot (2,5^2 - 2,2^2) = 1,41\pi = 4,4274 \text{ cm}^2$.
A altura da casca cilíndrica é igual ao comprimento do cano que é $6 \text{ m} = 600 \text{ cm}$.
Assim, o volume do cano é $V = S_{base} \cdot h = 4,4274 \cdot 600 = 2656,44 \text{ cm}^3$.

Como a densidade do ferro é $\mu = 7{,}8\ g/cm^3$, então a massa M do cano é dada por

$$\mu = \frac{M}{V} \Leftrightarrow 7{,}8 = \frac{M}{2656{,}44} \Leftrightarrow M = 2656{,}44 \cdot 7{,}8 \approx 20720\ g$$

20) Dividindo-se o polinômio $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + mx + t$ por $g(x) = x^2 + 2$, obtém-se resto $r(x) = 4x - 2$. Nessas condições, m e t são números reais tais que

a) $m = -3$ e $t = 6$.
b) $m = -2$ e $t = -10$.
c) $m = -1$ e $t = -2$.
d) $m = 1$ e $t = -5$.
e) $m = 2$ e $t = 10$.

RESPOSTA: b

RESOLUÇÃO:
Como f tem grau 4 e g tem grau 2, então o quociente da divisão é um polinômio de grau 2. Seja o quociente $q(x) = ax^2 + bx + c$, então temos:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x) \Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + mx + t = (x^2 + 2) \cdot (ax^2 + bx + c) + (4x - 2)$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 3x^3 + mx + t = ax^4 + bx^3 + (c + 2a)x^2 + (2b + 4)x + (2c - 2)$$

Como os dois polinômios são idênticos (iguais para todo x), então os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais. Assim, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c + 2a = 0 \Leftrightarrow c + 2 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow c = -4 \\ 2b + 4 = m \Leftrightarrow m = 2 \cdot (-3) + 4 = -2 \\ 2c - 2 = t \Leftrightarrow t = 2 \cdot (-4) - 2 = -10 \end{cases}$$

Portanto, $m = -2$ e $t = -10$.